

MISCELLANEA ANALYTICA DE SERIEBUS ET QUADRATURIS.

ACCESSERE

Variæ Considerationes de Methodis Comparationum, Combinationum & Differentiarum, Solutiones difficiliorum aliquot Problematum ad Sortem spectantium, itemque Constructiones faciles orbium Planetarum, una cum determinatione maximarum & minimarum mutationum quæ in motibus Corporum cœlestium occurrunt.

LONDINI:

Excudebant J. TONSON & J. WATTS.

M DCC XXX.



SPECTATISSIMO VIRO

MARTINO FOLKES,

ARMIGERO,

S. P. D.

A. DE MOIVRE.



IHIL mihi unquam optatius fuit, vir præſtantiſſime, quam ut occaſionem nanciſcerer meam erga te obſervantiam palam teſtandi, ſimul & ſtudiorum meorum fructus aliquot tibi dicandi, quos non indignos cenſeres qui a te benigne exciperentur. Nemo, qui conſuetudine tua utitur, neſcit quantam in Scientia Mathematica operam poſueris, quam felici ſucceſſu eam ſis proſecutus, quos uſus tibi inde derivaveris, ſive ad perpoliendum illud ingenium quod natura tibi dedit acerrimum, ſive ad Philoſophiæ naturalis Leges perſcrutandas, ſive ad optimarum Artium, fere quotquot ſunt, cognitionem tibi compa-

 randam.

randam. Ea vero qua decoraris Doctrina, Munus illud toties tibi a *Newtono*, cui bene cognitus eras, demandatum, ut vicem ſuam in Societate Regia impleres, Dignitas quâ hanc perſonam conſtanter ſuſtinuiſti; hæc, ne humanitatem tuam, affabilitatem, cæteraſque animi tui dotes memorem, ſummopere me urgent, immò impellunt, ut ſpeculationes has meas exquiſito tuo judicio exponam, quæ ſi tibi probentur, propoſitum aſſecutus fuero. Non hic quidem id genus Problemata reperies quibus Naturæ vires expenduntur, ſed cum ii qui hac ætate inter Mathematicos maxime floruerunt, quo viam ad majora ſibi ſternerent, Doctrinam Serierum & Quadraturarum ſummo ſtudio excoluerint, ſpero rem non ingratam me facturum, ſi pauca quædam oſtendero eo ſpectantia ut quæ in hoc genere præſertim requiruntur, aliquanto faciliora evadant. Quanquam vero, ex his aliqua ſatis facile mihi fuerint arceſſita, quin etiam ultro ſe in conſpectum dederint, attamen cum id non raro eveniat, ut quæ ſub oculos cadunt non continuo advertantur; eam laudem, ſi qua laus eſt, non faſtidioſe reſpuam quæ fortaſſe hinc mihi emerget, quod pauca caſu perceperim ab aliis prætermiſſa; qualiſcunque autem horum mihi obtigerit exitus, in eo libenter acquieſcam, ſi Tu, cum te fautorem aſſiduum præbeas eorum omnium qui ad id nituntur ut prodeſſe poſſint, eo nomine me benevolentia tua complecti velis.

Jan. 7° $17\frac{29}{30}$.



LECTORI



L E C T O R I

S.

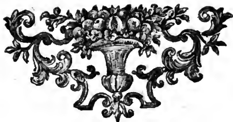


COmmodo tuo me consulturum putavi, Lector, si Demonstrationes primi Libri in Librum proxime insequentem, ad instar Scholii scriptum rejicerem, ubi eas fuse & quam fieri potuit dilucide tractatas reperies; illud autem praesertim in causa fuit cur hanc viam stricte tenerem, quod cum animadvertissem Demonstrationes Propositionibus vulgo subjectas, saepius obstare quominus mens ad Propositiones sequentes satis expedite se flectere posset, ut earum connexionem penitus perspiceret, easque uno quasi intuitu complecteretur, nihil tibi magis profuturum censuerim quàm si, Demonstrationibus ad tempus aliquod posthabitis, id unice perpenderes, utrum Conclusiones, ex principiis jam positis & tanquam concessis deductae, pro legitimis haberi possint; quo observato, connexio Propositionum inter se melius percipietur, tum etiam paratior erit aditus ad Demonstrationes assequendas. Quanquam vero haec procedendi ratio perraro a Geometris usurpetur, attamen eam Cl. Newtono *non displicuisse sensi; etenim cum ei Theoremata praecipua quae Lemmatibus primi Libri superstruuntur * conspicienda dedissem, eique generatim exposuissem quae fuerat mea demonstrandi ratio, eam aliquando satis commode adhiberi posse fassus est, modo Enunciatum Propositionis ita esset per se clarum ut Demonstrationis adjumento non indigeret,*

* 14 *Jan.* 1723.

digeret, quo vis verborum melius caperetur; in hac vero ſententia me firmaverunt doctiſſimi & amiciſſimi Viri D. Sanderſon, *Geometriæ Profeſſor apud Cantabrigienſes, & Rev.* D. Colſon, *quorum uterque mihi de iis mentem ſuam candidiſſime aperuit, quorumque conſiliis me plurimum debere libentiſſime agnoſco. Cæterum non alienum eſſe cenſeo iis obviam ire qui id mihi fortaſſe vitio vertent, quod Problemata primi Libri in plures partes quam neceſſe erat diſtribuerim, utpote quæ ad ſex aut ſeptem videbantur redigi poſſe; quibus id reſponſum velim, horum Problematum numerum ideo fuiſſe auctum, ut eorum ſolutiones munere Canonum fungerentur, atque propterea nihil melius me facturum putaſſe, quàm ſi ea ita ab omni ambiguitate liberarem, ut ad uſum maxime idonea redderem; quod quidem non tam commode fieri poterat, niſi ſuum cuique locum diſtincte aſſignaſſem. Illud præterea me movit ut alia quædam paululum dilatarem, quod cum Theorema meum de Sectione Anguli, quo fere nititur Doctrina tota primi Libri, demonſtratione ſua nudatum, Societati Regiæ * protuliſſem, multi ex hoc tempore me incitârunt ut tum illud Theorema tum cætera, quæ ad eundem ſcopum pertinent, copioſe explicarem, nec ſinerem quidquam dubii in re nova relinqui, quorum deſiderio recuſare non potui quin pro viribus meis obtemperarem.*

* 15 *Novemb.* 1722.



INDEX

INDEX CAPITUM
TOTIUS OPERIS.

LIBER I.

LIBER II.

LIBER III.

LIBER IV.

LIBER

INDEX CAPITUM.

LIBER V.

De Binomio $a+b$ *ad Poteſtatem permagnam evectô.*

LIBER VI.

De Seriebus Hyperbolicis, Circularibus, Mixtis & Determinatis.

LIBER VII.

Reſponſio ad quaſdam Criminationes.

LIBER VIII.





A LIST of the

SUBSCRIBERS.

A.

HIS *Grace the Duke of* St. Albans.
His Grace the Duke of Argyll.
John Arbuthnot, *M. D.*
Thomas Archer, *Esq;*

B

RT. *Hon. Lord* Berkeley *of* Stratton.
Rt. Hon. Lord Bathurst.
Bennet Coll. *Library.*
Mr. H. Berenger de Beaufain.
Mr. Joseph Billio.
Mr. John Blackwell, *Gr. Prof. at* Aberdeen. 6
Charles Du Bois, *Esq;*
Mr. Michel Bouyer.
Rev. James Bradley, *M. A. Ast. Pr. Sav.*
Mr. Charles Brent.
Rev. William Brome, *D. D.*
Noel Broxholme, *M. D.*
Sir John Buckworth, *Bart.*
James Burroughs, *Esq;*
John Bussiere, *Esq;*

C.

HIS *Grace the Duke of* Chandos.
Rt. Hon. Lord James Cavendish.
Rt. Hon. Lord Charles Cavendish.
Rt. Hon. Lord Cornwallis. 2
Mr. George Campbell.
George Cheyne, *M. D.* 2
Robert Clarke, *Esq;*
Anthony Collins, *Esq;*
Rev. John Colson, *M. A.* 3
John Conduit, *Esq;* 15
Edward Cook, *Esq;*
Mr. John Coppindal, *of Trin. Coll.* Cambr.
Rev. Cotterel, *Dean of* Raphoe.
Clare-Hall *Library.*
Rev. John Craig.
John Crew, *Esq;*
Sir Alexander Cuming, *Bart.*

D.

HIS *Grace the Duke of* Devonshire.
His Grace the Duke of Dorset.
Peter Daval, *Esq*;
Daniel Dering, *Esq*;
Hon. Edward Digby, *Esq*;
James Douglas, *Esq*;
Daniel Duncan, *M. D.*
Mr. Samuel Durham.

E.

RT.*Hon.*RichardEdgecomb,*Esq*;
Mr. John Eden.
John Elde, *Esq*;
Emanuel College *Library*.
Francis Eyles, *Esq*; *of Benn. Coll.*

F.

FRancis Fauquieres, *Esq*;
Coulson Fellows, *Esq*; 5
Martin Fellows, *Esq*;
William Fellows, *Esq*;
West Fenton, *Esq*; 2
Martin Folkes, *Esq*; 7
William Folkes, *Esq*;
Thomas Folkes, *Esq*;
Sir John Fortescue, *Knt.*
Henry Furnese, *Esq*; 2
Capt. George Furnese. 2
John Friend, *M. D.*

G.

HIS *Grace the Duke of* Grafton.
Thomas Garnier, *Esq*;
Mr. George Graham.
Robert Gray, *Esq*;
Mr. Green, *of Benn. Coll.*
Mr. James Gregory, *Math. Pr. Edinb.*
Mr. Isaac Guion.

H.

JOhn Hadley, *Esq*;
William Hanbury, *Esq*;
John Hanbury, *Esq*;
James Hammond, *Esq*;
Richard Hassel, *Esq*;
John Hedges, *Esq*;
John Herring, *Esq*;
Benjamin Hoadley, *M. D.*
Rev. Mr. Henry Holmes, *of Trin. Col.* Camb.
Mr. Gervase Holmes, *of Em. Col.*
Mr. Stephen Horseman.
Hon. Edward Howard, *Esq*;
Robert Hucks, *Esq*; 3
Archibald Hutchinson, *Esq*;

I.

RT. *Hon. Lord* Islay.
William Jones, *Esq*;
Rev. Mr. Jackson.
Mr. William Innys. 4
James Jurin, *M. D.*

K.

KIng's Coll. *Library*.
B. P. Knight, *Esq*;
John Knight, *Esq*;
Mr. Klingenstierna, *Math. Prof. at* Upsall.

Rt.

L.

RT. *Hon. Earl of* Lincoln.
Rt. Hon. Lord Visc. Lonſdale.
Rt. Hon. Lord Lynne.
Mr. Colin Mac Laurin, *Math. Profeſ.* Edinb. 6
Iſaac Leheup, *Eſq*;

M.

HIS *Grace the Duke of* Montague 10
His Grace the Duke of Mancheſter.
Rt. Hon. Lord Monſon.
Mr. John Machin, *Aſt. Pr. Gr. Sec R. S.*
Nicolas Man, *Eſq*;
Mr. de Maupertuis, *Acad. Par. & R. S. S.* 4
Richard Mead, *M. D. Med. Reg.*
Abraham Meure, *Eſq*;
Edward Montague, *Eſq*; 5
Col. John Montague. 4
Rev. Charles Morgan, *D. D. Maſter of Clare-Hall.*

N.

HIS *Grace the Duke of* Newcaſtle.
Hon. John Noel, *Eſq*;
Rev. William Nicolls, *D. D. Vicar of St.* Giles Crip.

O.

RT. *Hon. Earl of* Oxford. 3
Crew Offley, *Eſq*;
Robert Ord, *Eſq*;
Mr. Edmund Overall.
James Ord, *Eſq*; 2

P.

RT. *Hon. Lord* Paiſley.
Rt. Hon. Lord Parker. 6
Rt. Hon. Lord Percival.
Mr. Parker, *Fellow of Qu. Coll.* Cambr.
Robert Paul, *Eſq*;
Edward Pawlet, *Eſq*;
Hon. Henry Pelham, *Eſq*;
Thomas Pellet, *M. D.* 3
Henry Pemberton, *M. D. Med. Pr. Greſh.*
Henry Plumptre, *M. D.*
His Excell. Stephen Pointz, *Eſq*;
Uvedale Price, *Eſq*;

R.

HIS *Grace the Duke of* Richmond. 5
Andrew Ramſay, *Eſq*;
John Robartes, *Eſq*;
Mr. Benjamin Robins.

S.

RT. *Hon.* Robert *Earl of* Sunderland.
Rt. Hon. Earl of Suſſex.
Rt. Hon. Lady Diana Spencer.
Nicolas Sanderſon, *L. L. D. Math. Prof. Luc.*
Exton Sayer, *L. L. D. Chanc. of* Durham.
Hon. Auguſtus Schutz, *Eſq*;
John Selwin, *Eſq*; 2
Mr. James Sherard.
Skeen *of* Skeen, *Eſq*;
Robert Smith, *L. L. D. Math. Prof. Plum.* 6

Mr.

Mr. Ralph Snow.
James Stevens, *Esq*;
Charles Steurt, *M. D.*
Mr. James Stirling. 2

T.

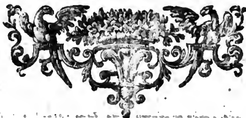
R *T. Hon.Lord.Visc.* Townshend.
Rt. Hon. Lord Trevor.
Brook Taylor, *L. L.D.*
Hon. Henry Temple, *Esq*;
Rev. Andrew Took, *M. A.*
Hon. Thomas Townshend, *Esq*;
Hon. William Townshend, *Esq*;
Trinity Coll. *Library.* Camb.

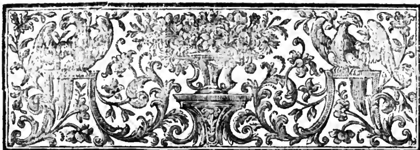
V.

Marquis Visconti.

W.

R *T. Hon. Earl of* Winchelsea.
Rt. Hon. Sir Robert Walpole,
Knt. of the Garter.
Edward Walpole, *Esq*;
Sir William Willis, *Bart*;
James Wilson, *M. D.*
Thomas Windham, *Esq*;
John White, *Esq*;
Thomas Woodcock, *Esq*;
Thomas Woodford, *Esq*;





Miscellanea Analytica.

LIBER PRIMUS.

De Ordinatis rationalibus in Simpliciores resolvendis.

LEMMA I.

SI sint l *&* x *Cosinus Arcuum duorum* A *&* B, *quorum uterque eodem Radio* 1 *describatur, quorumque prior sit posterioris multiplex in ea ratione quam habet numerus* n *ad Unitatem, tunc erit*

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}}$$

COROLLARIUM I.

Pone $\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} = z$, hinc erit $z^n = l + \sqrt{ll-1}$, seu $z^n - l = \sqrt{ll-1}$, sive, quadratis utrinque partibus, $z^{2n} - 2lz^n + ll = ll - 1$; deletisque hinc inde æqualibus, & facta transpositione, erit $z^{2n} - 2lz^n$

+1

$+1=0$; jam ex eo quod positum sit $\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}=z$, erit ex superiore Lemmate $x=\frac{1}{2}z+\frac{\frac{1}{2}}{z}$, sive $zz-2xz+1=0$.

COROLLARIUM II.

Quapropter si ex, Æquationibus binis $1-2lz^n+z^{2n}=0$. $1-2xz+zz=0$, expellatur Quantitas z, tunc orietur Æquatio nova qua definietur relatio inter Cosinus l & x, modo intelligatur Arcus A esse Quadrante minor.

COROLLARIUM III.

At si Arcus A sit Quadrante major, tunc Cosinus ejus erit $-l$, quo fiet ut Æquationes evasuræ sint $1+2lz^n+z^{2n}=0$, $1-2xz+zz=0$, e quibus si expungatur z, orietur Æquatio nova qua exprimetur relatio inter Cosinus l & x.

COROLLARIUM IV.

Atque adeo, si ex Æquationibus binis $1\mp 2lz^n+z^{2n}=0$, $1-2xz+zz=0$ expellatur quantitas z, hinc orietur Æquatio nova qua definietur relatio inter Cosinum Arcus A Quadrante minoris vel majoris (pro ut l Signo negativo vel affirmativo afficietur,) & Cosinus omnes Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$ &c. in qua Arcuum Serie, C designat Circumferentiam totam.

COROLLARIUM V.

Si quantitates a, b, c, d, &c. statuantur esse valores successivi Cosinus x in Æquatione $1-2xz+zz=0$; tunc ex supradictis facile concludetur Æquationem $1-2lz^n+z^{2n}=0$, conflari ex tot Æquationibus quadraticis $1-2az+zz=0$, $1-2bz+zz=0$, $1-2cz+zz=0$, $1-2dz+z\ \ =0$ &c. in se invicem perpetuò ductis, quot sunt Unitates in $\frac{1}{2}n$.

COROLLARIUM VI.

Si detur Divisor aliquis trinomialis & quadraticus Æquationis $1-2lz^n+z^{2n}=0$, qualis nimirum $1-2az+zz=0$, tunc comparatione

tione facta hujus Divisoris cum Trinomio $1-2xz+zz=0$, ex hac comparatione emerget unus ex valoribus quantitatis x; sic, in præsente casu, concludi potest esse $x=a$.

COROLLARIUM VII.

Si ex Æquationibus binis $1+z^n=0$, $1-2xz+zz=0$, eliminetur quantitas z; prodibit, modo n sit numerus par, Æquatio qua determinantur Cosinus eorum Arcuum qui sint ad Semicircumferentiam, semel, ter, quinquies, septies &c. sumptam in ea ratione quam habet 1 ad n; quamobrem si sint a, b, c, d &c. valores horum Cosinuum, erunt $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, $1-2dz+zz$ &c. Divisores trinomiales quantitatis $1+z^n$, quorum multitudo designabitur per $\frac{1}{2}n$: poterit fieri ut unus ex Cosinibus a, b, c, d &c. futurus sit nihilo æqualis, quod quidem tunc eveniet, cum n erit numerus pariter impar, quo in casu $1+zz$ habendus erit in numero Divisorum Trinomialium.

COROLLARIUM VIII.

At si sit n numerus impar, instituaturque divisio quantitatis $1+z^n$ per $1+z$, & Quotiens dicatur Q; tunc ex Æquationibus binis $Q=0$, & $1-2xz+zz=0$, si expellatur quantitas z; orietur Æquatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sint ad Semicircumferentiam semel, ter, quinquies &c. sumptam in ea ratione quam habet 1 ad n; quapropter si quantitates a, b, c, d &c. denotaverint valores istorum Cosinuum, erunt $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, $1-2dz+zz$ &c. divisores trinomiales quantitatis $1+z^n$, quorum multitudo designabitur per $\frac{n-1}{2}$, his vero accedet divisor unicus binomialis $1+z$.

COROLLARIUM IX.

Si sit n numerus par, & dividatur quantitas $1-z^n$ per $1-zz$, & Quotus ex hac divisione ortus dicatur Q, tunc ex Æquationibus binis $Q=0$, $1-2xz+zz=0$, expulsa quantitate z; emerget Æquatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sint ad Circumferentiam semel, bis, ter, quater, quinquies &c. sumptam in ratione 1 ad n; quapropter si a, b, c, d &c. ponantur esse valores istorum Cosinuum, erunt $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, $1-2dz+zz$ &c. divisores trinomiales quantitatis $1-z^n$, quorum

 mul-

multitudo designatur per $\frac{n-2}{2}$; his autem adjunguntur Divisores duo binomiales $1-z$, & $1+z$.

COROLLARIUM X.

Quod si fuerit n numerus impar, & dividatur $1-z^n$ per $1-z$, & Quotus dicatur Q, tunc ex Æquationibus binis $Q=0$ & $1-2xz+zz=0$, expulsa quantitate z, orietur Æquatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sint ad Circumferentiam semel, bis, ter, quater, quinquies &c. sumptam in ratione 1 ad n: quapropter si spectentur quantitates a, b, c, d &c. tanquam valores cogniti istorum Cosinuum, consequens erit ut $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, $1-2dz+zz$ &c. futuri sint divisores trinomiales quantitatis $1-z^n$, quorum divisorum multitudo exprimetur per $\frac{n-1}{2}$: his præterea adjungetur Divisor unicus Binomialis $1-z$.

LEMMA II.

Data qualibet Fractione $\frac{1}{1-ez+fzz-gz^3}$ *&c. cujus denominator ex datis,* 1, e, f, g &c. *& indeterminata* z, *quoquomodo constituatur; Fractionem illam in Fractiones simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Fingatur Denominator $1-ez+fzz-gz^3+hz^4$ &c. esse $=0$, ex qua Æquatione formetur hæc altera, $z^4-ez^3+fzz-gz+h=0$ cujus Radices sint m, p, q, s &c.; sint etiam μ, π, $\varkappa$, σ, producta differentiarum unicuique Radicum & Radicibus reliquis interjacentium, hoc est, sit

$$\mu = \overline{m-p} \times \overline{m-q} \times \overline{m-s} \text{ \&c.}$$

$$\pi = \overline{p-m} \times \overline{p-q} \times \overline{p-s} \text{ \&c.}$$

$$\varkappa = \overline{q-m} \times \overline{q-p} \times \overline{q-s} \text{ \&c.}$$

$$\sigma = \overline{s-m} \times \overline{s-p} \times \overline{s-q} \text{ \&c.}$$

ponatur jam λ esse index altissimus indeterminatæ z in dicta Æquatione,

quatione, tunc factis $\frac{m^{\lambda-1}}{\mu}=A$, $\frac{p^{\lambda-1}}{\pi}=B$, $\frac{q^{\lambda-1}}{x}=C$, $\frac{s^{\lambda-1}}{\sigma}=D$ &c. fractio proposita ad hasce simpliciores adducetur, nimirum $\frac{A}{1-mz}$, $\frac{B}{1-pz}$, $\frac{C}{1-qz}$, $\frac{D}{1-sz}$ &c.

COROLLARIUM.

Si sint m & p Radices duæ imaginariæ ex eadem Æquatione quadratica ortæ, quas ideo Radices cognatas appellare licet, addanturque in unum Fractiones $\frac{A}{1-mz}$, & $\frac{B}{1-pz}$; tunc quidquid est imaginarii in utraque fractione seorsim sumpta, semper ex earum summa $\frac{A-mBz+B-pAz}{1-mz-pz+mpzz}$ evanescet.

LEMMA III.

Data una aliqua ex Radicibus Æquationis cujuscunque, invenire productum differentiarum omnium huic Radici & Radicibus reliquis interjacentium.

SOLUTIO.

Æquatione, si opus est, rite præparata, tractetur incognita perinde ac si esset indeterminata: tum assumpta Æquationis Fluxione, dividantur singuli termini per Fluxionem indeterminatæ, quibus factis, loco incognitæ z substituatur valor ejus quilibet cognitus, & terminorum omnium aggregatum ex hac operatione nascentium quæsito satisfacient.

PROBLEMA I.

Data ordinata hujus formæ $\frac{1}{1+z^n}$, *in qua* n *ponatur esse numerus par, eam in simpliciores Ordinatas resolvere.*

SOLUTIO.

Fingatur $1+z^n$ esse $=0$, sint m, p, q, s &c. Radices hujus Æquationis, vel quod eòdem recidit, earum reciprocæ; etenim in Æquatione $1+z^n=0$, si scribatur $\frac{1}{z}$ pro z, eadem exurget Æquatio

quæ

quæ antea, nimirum $z^n + 1 = 0$, hinc per Lemma Secundum, resolvetur hæc ordinata in suas componentes $\frac{A}{1-mz} + \frac{B}{1-pz} + \frac{C}{1-qz} + \frac{D}{1-sz}$ &c. quarum primæ binæ in unum collectæ conficiunt summam $\frac{A - mBz + B - pAz}{1 - mz - pz + mpzz}$, sed ex eodem Lemmate est $A = \frac{m^{\lambda - 1}}{\mu}$, jam vero in hoc casu, est $\lambda = n$, adeaque erit $A = \frac{m^{n-1}}{\mu}$; sed ex tertio Lemmate est $\mu = nz^{n-1}$, vel propter $z = m$, est $\mu = nm^{n-1}$, erit igitur $A = \frac{m^{n-1}}{nm^{n-1}} = \frac{1}{n}$: & pari ratione erit $B = \frac{1}{n}$, ac proinde erit summa $A + B = \frac{2}{n}$. Sit nunc $1 - 2az + zz = 0$ ea Æquatio quadratica e qua Radices cognatæ m & p ortæ sint; erit igitur $m + p = 2a$, & $mp = 1$, quo fiet ut $mB + pA$, sive $\frac{m+p}{n}$ futurum sit $= \frac{2a}{n}$: erit igitur summa duarum Componentium $\frac{A}{1-mz} + \frac{B}{1-pz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}az}{1 - 2az + zz}$; & eodem jure, si sit $1 - 2bz + zz = 0$ ea Æquatio quadratica e qua Radices cognatæ q & s ortæ sint, erit summa duarum Componentium $\frac{C}{1-qz} + \frac{D}{1-sz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}bz}{1 - 2bz + zz}$.

Idcirco, si dividatur semicircumferentia cujus radius est 1, in partes æquales quarum multitudo designetur per n; deinde ex primo, tertio, quinto & impari quoque divisionis termino demittantur ad diametrum perpendicula quibus determinentur Cosinus a, b, c, d &c. totidem Arcuum ab eodem diametri termino incipientium; tunc erit $\frac{1}{1 + z^n} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}az}{1 - 2az + zz} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}bz}{1 - 2bz + zz} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}cz}{1 - 2cz + zz}$ &c. hæc vero series ad tot terminos est continuanda quot sunt unitates in $\frac{1}{2}n$.

PROBLEMA II.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1 + z^n}$, *in qua* n *ponatur esse numerus impar, eam in simpliciores resolvere.*

SO-

SOLUTIO.

Fingatur $1+z^n=0$: hujus Æquationis Radices sint $m, p, q, s \ldots\ldots t$ quarum primæ binæ sint radices cognatæ Æquationis quadraticæ $1-2az+zz=0$, secundæ binæ sint radices cognatæ Æquationis quadraticæ $1-2bz+zz=0$, & sic deinceps usque dum exhauriantur Cosinus omnes a, b, c, d &c. quorum multitudo designatur per $\frac{n-1}{2}$, Sit etiam t radix ultima residua quæ quidem erit æqualis unitati negative sumptæ, utpote quæ genita sit ex Æquatione $1+z=0$ per quam Æquatio $1+z^n=0$ dividi potest. His positis resolvetur Ordinata data in Componentes $\frac{A}{1-mz}+\frac{B}{1-pz}+\frac{C}{1-qz}+\frac{D}{1-sz}$ &c. $+\frac{E}{1+z}$ quarum primæ binæ conficiunt summam $\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}az}{1-2az+zz}$, secundæ binæ conficiunt summam $\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$, & sic deinceps, ultima vero residua æqualis est fractioni $\frac{\frac{1}{n}}{1+z}$: iisdem igitur positis ac in superiori Problemate, erit $1+z^n=\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}az}{1-2az+zz}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}cz}{1-2cz+zz}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}dz}{1-2dz+zz}$ &c. $+\frac{\frac{1}{n}}{1+z}$.

PROBLEMA III.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1-z^n}$, *in qua* n *ponatur esse numerus par, eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Fingatur $1-z^n=0$: Sint Radices hujus Æquationis $+1, m, p, q, s$ &c. -1, quarum m & p sint Radices cognatæ Æquationis $1-2az+zz, =0$; p & q Radices cognatæ Æquationis $1-2bz+zz=0$; $+1$ & -1 Radices extremæ ex divisore $1-zz$ natæ: his positis, si componentes sint $\frac{A}{1-z}, \frac{B}{1-mz}, \frac{C}{1-pz}, \frac{D}{1-qz}, \frac{E}{1-sz}$ &c. $\frac{F}{1+z}$, invenietur unaquæque quantitatum, $A, B, C, D, E, F,$ per Methodum

thodum supra expositam æqualis esse quantitati $\frac{1}{n}$; erunt igitur

Fractiones extremæ, $\frac{\frac{1}{n}}{1-z}$ & $\frac{\frac{1}{n}}{1+z}$; invenietur prætereа summa binarum

$\frac{B}{1-mz}$ & $\frac{C}{1-pz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+zz}$, itemque summa binarum $\frac{D}{1-qz}$ & $\frac{E}{1-sz}$

$= \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$ & sic de cæteris.

Quamobrem si dividatur Semicircumferentia cujus Radus sit 1, in partes æquales quarum multitudo sit n; deinde ex secundo, quarto, sexto, & pari quoque divisionis termino demittantur perpendicula ad Diametrum quibus determinentur Cosinus a, b, c, d &c. totidem Arcuum ab eodem diametri termino incipientium;

tunc erit $\frac{1}{1-z^n} = \frac{\frac{1}{n}}{1-z} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$ &c. $+ \frac{\frac{1}{n}}{1+z}$

PROBLEMA IV.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1-z^n}$ *in qua* n *sit numerus impar, eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Fingatur $1-z^n=0$; sint hujus Æquationis Radices, 1, m, p, q, s &c. quarum m & p sint Radices cognatæ Æquationis $1-2az+zz=0$, q & s, Radices itidem cognatæ Æquationis $1-2bz+zz$, $=0$, &c. Denique $+1$ Radix unica superstes ex divisore $1-z=0$, nata: quibus positis, si sint $\frac{A}{1-z}$, $\frac{B}{1-mz}$, $\frac{C}{1-pz}$, $\frac{D}{1-qz}$, $\frac{E}{E-sz}$, fractiones componentes; per methodum ante expositam, invenietur unaquæque quantitatum A, B, C, D, E &c. esse $= \frac{1}{n}$, adeoque

componens prima erit $= \frac{\frac{1}{n}}{1-z}$; invenietur prætereа summa binarum

$\frac{B}{1-mz} + \frac{C}{1-pz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+zz}$, itemque summa binarum $\frac{D}{1-qz} + \frac{E}{1-sz}$

$= \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$, & sic deinceps. Quare

Quare si dividatur semicircumferentia circuli eodem modo quo præscriptum fuit in superiori Problemate, erit $\frac{1}{1-z^n} = \frac{\frac{1}{n}}{1-z} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$ &c.

PROBLEMA V.

Data Ordinata hujus formæ $1-2lz^n+z^{2n}$ *in qua* l *ponatur esse minor Unitate, eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Resumptis Æquationibus binis $1-2lz^n+z^{2n}=0$, & $1-2xz+zz=0$ sint m, p, q, s &c. Radices Æquationis prioris, quarum m & p sint etiam Radices posterioris ubi indeterminata x restricta fuerit ad cognitam a; jam ex eo quod sit $1-2lz^n+z^{2n}=0$, patet esse $z^n + \frac{1}{z^n} = 2l$, præterea ex eo quod sit $1-2az+zz=0$, patet summam Radicum hujus Æquationis esse $=2a$, itemque factum ex earum multiplicatione esse $=1$; habemus itaque 1° $m^n+p^n = 2l$, 2° $m+p=2a$, 3° $mp=1$: pone jam fractiones componentes in quas Ordinata data resolvenda sit, esse $= \frac{A}{1-mz}$, $\frac{B}{1-pz}$, $\frac{C}{1-qz}$, $\frac{D}{1-sz}$, &c. ergo primæ binæ ad se invicem additæ conficient summam $\frac{A-mBz+B-pAz}{1-mz-pz+mpzz}$; sed ex secundo Lemmate est $A = \frac{m^{\lambda-1}}{\mu}$, ubi scilicet λ seu $2n$ est Index altissimæ potestatis Æquationis $1-2lz^n+z^{2n}=0$, itemque ex tertio Lemmate est $\mu = 2nz^{2n-1} - 2nlz^{n-1}$, sive, scripto m pro z, est $\mu = 2nm^{2n-1} - 2nlm^{n-1}$, erit igitur $A = \frac{m^{2n-1}}{2nm^{2n-1}-2nlm^{n-1}} = \frac{m^n}{2nm^n-2nl}$, & pari ratione erit $B = \frac{p^n}{2np^n-2nl}$, adeoque summa $A+B$ erit $= \frac{2np^nm^n+2lnm^n+2np^nm^n-2lnp^n}{4nnp^nm^n-4nnlp^n-4nnlm^n+4nnll}$ sed propter $m^n+p^n=2l$, &

$mp = 1$. Sequitur ſummam $A + B$ redactum iri ad $\frac{4n \times \overline{1 - ll}}{4nn \times \overline{1 - ll}} = \frac{1}{n}$; Porro ſumma $pA + mB = \frac{pm^n}{2nm^n - 2nl} + \frac{mp^n}{2np^n}$, ſed propter $m + p = 2a$, & $mp = 1$. hæc ſumma redigetur ad $\frac{\overline{2a - l} \times \overline{m^{n-1} + p^{n-1}}}{2n \times \overline{1 - ll}}$, ſed quo jure eſt $m^n + p^n = 2l$, eodem jure erit $m^{n-1} + p^{n-1} = 2e$, modo intelligatur e eſſe Coſinus Arcus ejus qui ſit ad Arcum cujus Coſinus eſt a, ut $n - 1$ ad 1, unde tandem fit ut $pA + mB$ ſit $= \frac{a - le}{n - lln}$; erit igitur ſumma duarum fractionum $\frac{A}{1 - mz} + \frac{B}{1 - pz} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{a - le}{n - lln} z}{1 - mz - pz + mpzz} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{a - le}{n - lln} z}{1 - 2az + zz}$, & eodem proceſſu, fractiones quæque binæ reliquæ in unum addi poterunt.

Quapropter ſi ſit A Arcus Quadrante minor cujus Coſinus ſit l ad Radium 1, C circumferentia tota; a, b, c, d &c. Coſinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{C - A}{n}$, $\frac{C + A}{n}$, $\frac{2C - A}{n}$, $\frac{2C + A}{n}$ &c. e, f, g, h &c. Coſinus eorum Arcuum qui ſinguli ad ſingulos Arcus antecedentes eodem ordine ſumptos eam rationem habeant quam habet numerus $n - 1$ ad Unitatem; tunc erit $\frac{1}{1 - 2lz^n + z^{2n}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{a - le}{n - lln} z}{1 - 2az + zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{b - lf}{n - lln}}{12 - 2bz + zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{c - lf}{n - lln} z}{1 - 2cz + zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{d - lh}{n - lln}}{1 - 2dz + zz}$ &c.

PROBLEMA VI.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1 - 2lz^n + z^{2n}}$, *in qua* l *ſit major Unitate, eam in ſimpliciores reſolvere.*

SOLUTIO.

Fac $l + \sqrt{ll - 1} = m$, $l - \sqrt{ll - 1} = p$; pone inſuper $x = z\sqrt[n]{m}$ & $y = z\sqrt[n]{p}$; quo facto, Ordinata data reſolvetur in haſce duas

$\frac{m}{m - p}$

$\frac{m}{m-p} \times \frac{1}{1-x^n} - \frac{p}{m-p} \times \frac{1}{1-y^n}$, quarum utraque ex Prob. 3. & 4. ad componentes suas adducetur.

PROBLEMA VII.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1+2lz^n+z^{2n}}$ *in qua ponatur esse* l *Unitate minor, eam in simpliciores resolvere.*

m 1, … uum … &c. … an- … his … atur … /m

… perspicuum est Ordinatam datam divisum iri in has binas $\frac{m}{m-p} \times \frac{1}{1+x^n} - \frac{p}{m-p} \times \frac{1}{1+y^n}$, quarum utraque in simpliciores resolvi poterit.

D.

HIS *Grace the Duke of* Devonshire.
His Grace the Duke of Dorset.
Peter Daval, *Esq*;
Daniel Dering, *Esq*;
Hon. Edward Digby, *Esq*;
James Douglas, *Esq*;
Daniel Duncan, *M. D.*
Mr. Samuel Durham.

E.

RT. *Hon.* Richard Edgecomb, *Esq*;
Mr. John Eden.
John Elde, *Esq*;
Emanuel College *Library*.
Francis Eyles, *Esq*; *of Benn. Coll.*

F.

FRancis Fauquieres, *Esq*;
Coulson Fellows, *Esq*; 5
Martin Fellows, *Esq*;
William Fellows, *Esq*;
West Fenton, *Esq*; 2
Martin Folkes, *Esq*; 7
~~William Folkes, *Esq*;~~
Thomas Folkes, *Esq*;
Sir John Fortescue, *Knt.*
Henry Furnese, *Esq*; 2
Capt. George Furnese. 2
John Friend, *M. D.*

G.

HIS *Grace the Duke of* Grafton.
Thomas Garnier, *Esq*;
Mr. George Graham.
Robert Gray, *Esq*;
Mr. Green, *of Benn. Coll.*
Mr. James Gregory, *Math. Pr. Edinb.*
Mr. Isaac Guion.

H.

JOhn Hadley, *Esq*;
William Hanbury, *Esq*;
John Hanbury, *Esq*;
James Hammond, *Esq*;
Richard Hassel, *Esq*;
John Hedges, *Esq*;
John Herring, *Esq*;
Benjamin Hoadley, *M. D.*
Rev. Mr. Henry Holmes, *of Trin. Col.* Camb.
Mr. Gervase Holmes, *of Em. Col.*
Mr. Stephen Horseman.
Hon. Edward Howard, *Esq*;
Robert Hucks, *Esq*; 3
Archibald Hutchinson, *Esq*;

I.

RT. *Hon. Lord* Islay.
William Jones, *Esq*;
~~*Rev. Mr.* Jackson.~~
Mr. William Innys. 4
James Jurin, *M. D.*

K.

KIng's Coll. *Library*.
B. P. Knight, *Esq*;
John Knight, *Esq*;
Mr. Klingenstierna, *Math. Prof. at* Upsall.

Rt.

L.

RT. *Hon. Earl of* Lincoln.
Rt. Hon. Lord Visc. Lonsdale.
Rt. Hon. Lord Lynne.
Mr. Colin Mac Laurin, *Math. Profes.* Edinb. 6
Isaac Leheup, *Esq*;

M.

HIS *Grace the Duke of* Montague 10
His Grace the Duke of Manchester.
Rt. Hon. Lord Monson.
Mr. John Machin, *Ast. Pr. Gr. Sec R. S.*
Nicolas Man, *Esq*;
Mr. de Maupertuis, *Acad. Par. & R. S. S.* 4
Richard Mead, *M. D. Med. Reg.*
Abraham Meure, *Esq*;
Edward Montague, *Esq*; 5
Col. John Montague. 4
Rev. Charles Morgan, *D. D. Master of Clare-Hall.*

N.

HIS *Grace the Duke of* Newcastle.
Hon. John Noel, *Esq*;
Rev. William Nicolls, *D. D. Vicar of St.* Giles Crip.

O.

RT. *Hon. Earl of* Oxford. 3
Crew Offley, *Esq*;
Robert Ord, *Esq*;
Mr. Edmund Overall.
James Ord, *Esq*; 2

P.

RT. *Hon Lord* Paisley.
Rt. Hon. Lord Parker. 6
Rt. Hon. Lord Percival.
Mr. Parker, *Fellow of Qu. Coll.* Cambr.
Robert Paul, *Esq*;
Edward Pawlet, *Esq*;
Hon. Henry Pelham, *Esq*;
Thomas Pellet, *M. D.* 3
Henry Pemberton, *M. D. Med. Pr. Gresh.*
Henry Plumptre, *M. D.*
His Excell. Stephen Pointz, *Esq*;
Uvedale Price, *Esq*;

R.

HIS *Grace the Duke of* Richmond. 5
Andrew Ramsay, *Esq*;
John Robartes, *Esq*;
Mr. Benjamin Robins.

S.

RT. *Hon.* Robert *Earl of* Sunderland.
Rt. Hon. Earl of Sussex.
Rt. Hon. Lady Diana Spencer.
Nicolas Sanderson, *L. L. D. Math. Prof. Luc.*
Exton Sayer, *L. L. D. Chanc. of* Durham.
Hon. Augustus Schutz, *Esq*;
John Selwin, *Esq*; 2
Mr. James Sherard.
Skeen *of* Skeen, *Esq*;
Robert Smith, *L. L. D. Math. Prof. Plum.* 6

Mr. Ralph Snow.
James Stevens, *Esq;*
Charles Steurt, *M. D.*
Mr. James Stirling. 2

T.

R*T. Hon. Lord. Visc.* Townshend.
Rt. Hon. Lord Trevor.
Brook Taylor, *L. L.D.*
Hon. Henry Temple, *Esq;*
Rev. Andrew Took, *M. A.*
Hon. Thomas Townshend, *Esq;*
Hon. William Townshend, *Esq;*
Trinity Coll. *Library.* Camb.

V.

Marquis Visconti.

W.

R*T. Hon. Earl of* Winchelsea.
Rt. Hon. Sir Robert Walpole, *Knt. of the Garter.*
Edward Walpole, *Esq;*
Sir William Willis, *Bart;*
James Wilson, *M. D.*
Thomas Windham, *Esq;*
John White, *Esq;*
Thomas Woodcock, *Esq;*
Thomas Woodford, *Esq;*





Miscellanea Analytica.

LIBER PRIMUS.

De Ordinatis rationalibus in Simpliciores resolvendis.

LEMMA I.

SI sint l *&* x *Cosinus Arcuum duorum* A *&* B, *quorum uterque eodem Radio* 1 *describatur, quorumque prior sit posterioris multiplex in ea ratione quam habet numerus* n *ad Unitatem, tunc erit*

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}}$$

COROLLARIUM I.

Pone $\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} = z$, hinc erit $z^n = l + \sqrt{ll-1}$, seu $z^n - l = \sqrt{ll-1}$, sive, quadratis utrinque partibus, $z^{2n} - 2lz^n + ll = ll - 1$; deletisque hinc inde æqualibus, & facta transpositione, erit $z^{2n} - 2lz^n$

+1

$+1=0$; jam ex eo quod positum sit $\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}=z$, erit ex superiore Lemmate $x=\frac{1}{2}z+\frac{\frac{1}{2}}{z}$, sive $zz-2xz+1=0$.

COROLLARIUM II.

Quapropter si ex, Æquationibus binis $1-2lz^n+z^{2n}=0$. $1-2xz+zz=0$, expellatur Quantitas z, tunc orietur Æquatio nova qua definietur relatio inter Cosinus l & x, modo intelligatur Arcus A esse Quadrante minor.

COROLLARIUM III.

At si Arcus A sit Quadrante major, tunc Cosinus ejus erit $-l$, quo fiet ut Æquationes evasuræ sint $1+2lz^n+z^{2n}=0$, $1-2xz+zz=0$, e quibus si expungatur z, orietur Æquatio nova qua exprimetur relatio inter Cosinus l & x.

COROLLARIUM IV.

Atque adeo, si ex Æquationibus binis $1\mp 2lz^n+z^{2n}=0$, $1-2xz+zz=0$ expellatur quantitas z, hinc orietur Æquatio nova qua definietur relatio inter Cosinum Arcus A Quadrante minoris vel majoris (pro ut l Signo negativo vel affirmativo afficietur,) & Cosinus omnes Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$ &c. in qua Arcuum Serie, C designat Circumferentiam totam.

COROLLARIUM V.

Si quantitates a, b, c, d, &c. statuantur esse valores successivi Cosinus x in Æquatione $1-2xz+zz=0$; tunc ex supradictis facile concludetur Æquationem $1-2lz^n+z^{2n}=0$, conflari ex tot Æquationibus quadraticis $1-2az+zz=0$, $1-2bz+zz=0$, $1-2cz+zz=0$, $1-2dz+z=0$ &c. in se invicem perpetuò ductis, quot sunt Unitates in $\frac{1}{2}n$.

COROLLARIUM VI.

Si detur Divisor aliquis trinomialis & quadraticus Æquationis $1-2lz^n+z^{2n}=0$, qualis nimirum $1-2az+zz=0$, tunc comparatione

tione facta hujus Divisoris cum Trinomio $1-2xz+zz=0$, ex hac comparatione emerget unus ex valoribus quantitatis x; sic, in præsente casu, concludi potest esse $x=a$.

COROLLARIUM VII.

Si ex Æquationibus binis $1+z^n=0$, $1-2xz+zz=0$, eliminetur quantitas z; prodibit, modo n sit numerus par, Æquatio qua determinantur Cosinus eorum Arcuum qui sint ad Semicircumferentiam, semel, ter, quinquies, septies &c. sumptam in ea ratione quam habet 1 ad n; quamobrem si sint a, b, c, d &c. valores horum Cosinuum, erunt $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, $1-2dz+zz$ &c. Divisores trinomiales quantitatis $1+z^n$, quorum multitudo designabitur per $\frac{1}{2}n$: poterit fieri ut unus ex Cosinibus a, b, c, d &c. futurus sit nihilo æqualis, quod quidem tunc eveniet, cum n erit numerus pariter impar, quo in casu $1+zz$ habendus erit in numero Divisorum Trinomialium.

COROLLARIUM VIII.

At si sit n numerus impar, instituaturque divisio quantitatis $1+z^n$ per $1+z$, & Quotiens dicatur Q; tunc ex Æquationibus binis $Q=0$, & $1-2xz+zz=0$, si expellatur quantitas z; orietur Æquatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sint ad Semicircumferentiam semel, ter, quinquies &c. sumptam in ea ratione quam habet 1 ad n; quapropter si quantitates a, b, c, d &c. denotaverint valores istorum Cosinuum, erunt $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, $1-2dz+zz$ &c. divisores trinomiales quantitatis $1+z^n$, quorum multitudo designabitur per $\frac{n-1}{2}$, his vero accedet divisor unicus binomialis $1+z$.

COROLLARIUM IX.

Si sit n numerus par, & dividatur quantitas $1-z^n$ per $1-zz$, & Quotus ex hac divisione ortus dicatur Q, tunc ex Æquationibus binis $Q=0$, $1-2xz+zz=0$, expulsa quantitate z; emerget Æquatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sint ad Circumferentiam semel, bis, ter, quater, quinquies &c. sumptam in ratione 1 ad n; quapropter si a, b, c, d &c. ponantur esse valores istorum Cosinuum, erunt $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, $1-2dz+zz$ &c. divisores trinomiales quantitatis $1-z^n$, quorum

 mul-

multitudo designatur per $\frac{n-2}{2}$; his autem adjunguntur Divisores duo binomiales $1-z$, & $1+z$.

COROLLARIUM X.

Quod si fuerit n numerus impar, & dividatur $1-z^n$ per $1-z$, & Quotus dicatur Q, tunc ex Æquationibus binis $Q=0$ & $1-2xz+zz=0$, expulsa quantitate z, orietur Æquatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sint ad Circumferentiam semel, bis, ter, quater, quinquies &c. sumptam in ratione 1 ad n: quapropter si spectentur quantitates a, b, c, d &c. tanquam valores cogniti istorum Cosinuum, consequens erit ut $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, $1-2dz+zz$ &c. futuri sint divisores trinomiales quantitatis $1-z^n$, quorum divisorum multitudo exprimetur per $\frac{n-1}{2}$: his præterea adjungetur Divisor unicus Binomialis $1-z$.

LEMMA II.

Data qualibet Fractione $\frac{1}{1-ez+fzz-gz^3}$ *&c. cujus denominator ex datis*, 1, e, f, g &c. *& indeterminata* z, *quoquomodo constituatur; Fractionem illam in Fractiones simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Fingatur Denominator $1-ez+fzz-gz^3+hz^4$ &c. esse $=0$, ex qua Æquatione formetur hæc altera, $z^4-ez^3+fzz-gz+h=0$ cujus Radices sint m, p, q, s &c.; sint etiam μ, π, $\varkappa$, σ, producta differentiarum unicuique Radicum & Radicibus reliquis interjacentium, hoc est, sit

$$\mu = \overline{m-p} \times \overline{m-q} \times \overline{m-s} \text{ \&c.}$$

$$\pi = \overline{p-m} \times \overline{p-q} \times \overline{p-s} \text{ \&c.}$$

$$\varkappa = \overline{q-m} \times \overline{q-p} \times \overline{q-s} \text{ \&c.}$$

$$\sigma = \overline{s-m} \times \overline{s-p} \times \overline{s-q} \text{ \&c.}$$

ponatur jam λ esse index altissimus indeterminatæ z in dicta Æquatione,

quatione, tunc factis $\frac{m^{\lambda-1}}{\mu} = A$, $\frac{p^{\lambda-1}}{\pi} = B$, $\frac{q^{\lambda-1}}{\varkappa} = C$, $\frac{s^{\lambda-1}}{\sigma} = D$ &c. fractio proposita ad hasce simpliciores adducetur, nimirum $\frac{A}{1-mz}$, $\frac{B}{1-pz}$, $\frac{C}{1-qz}$, $\frac{D}{1-sz}$ &c.

COROLLARIUM.

Si sint m & p Radices duæ imaginariæ ex eadem Æquatione quadratica ortæ, quas ideo Radices cognatas appellare licet, addanturque in unum Fractiones $\frac{A}{1-mz}$, & $\frac{B}{1-pz}$; tunc quidquid est imaginarii in utraque fractione seorsim sumpta, semper ex earum summa $\frac{A - mBz + B - pAz}{1 - mz - pz + mpzz}$ evanescet.

LEMMA III.

Data una aliqua ex Radicibus Æquationis cujuscunque, invenire productum differentiarum omnium huic Radici & Radicibus reliquis interjacentium.

SOLUTIO.

Æquatione, si opus est, rite præparata, tractetur incognita perinde ac si esset indeterminata: tum assumpta Æquationis Fluxione, dividantur singuli termini per Fluxionem indeterminatæ, quibus factis, loco incognitæ z substituatur valor ejus quilibet cognitus, & terminorum omnium aggregatum ex hac operatione nascentium quasito satisfacient.

PROBLEMA I.

Data ordinata hujus formæ $\frac{1}{1+z^n}$, *in qua* n *ponatur esse numerus par, eam in simpliciores Ordinatas resolvere.*

SOLUTIO.

Fingatur $1+z^n$ esse $=0$, sint m, p, q, s &c. Radices hujus Æquationis, vel quod eodem recidit, earum reciprocæ; etenim in Æquatione $1+z^n=0$, si scribatur $\frac{1}{z}$ pro z, eadem exurget Æquatio

quæ

quæ antea, nimirum $z^n+1=0$, hinc per Lemma Secundum, resolvetur hæc ordinata in suas componentes $\frac{A}{1-mz}+\frac{B}{1-pz}+\frac{C}{1-qz}+\frac{D}{1-sz}$ &c. quarum primæ binæ in unum collectæ conficiunt summam $\frac{A-mBz+B-pAz}{1-mz-pz+mpzz}$, sed ex eodem Lemmate est $A=\frac{m^{\lambda-1}}{\mu}$, jam vero in hoc casu, est $\lambda=n$, adeaque erit $A=\frac{m^{n-1}}{\mu}$; sed ex tertio Lemmate est $\mu=nz^{n-1}$, vel propter $z=m$, est $\mu=nm^{n-1}$, erit igitur $A=\frac{m^{n-1}}{nm^{n-1}}=\frac{1}{n}$: & pari ratione erit $B=\frac{1}{n}$, ac proinde erit summa $A+B=\frac{2}{n}$. Sit nunc $1-2az+zz=0$ ea Æquatio quadratica e qua Radices cognatæ m & p ortæ sint; erit igitur $m+p=2a$, & $mp=1$, quo fiet ut $mB+pA$, sive $\frac{m+p}{n}$ futurum sit $=\frac{2a}{n}$: erit igitur summa duarum Componentium $\frac{A}{1-mz}+\frac{B}{1-pz}=\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}az}{1-2az+zz}$; & eodem jure, si sit $1-2bz+zz=0$ ea Æquatio quadratica e qua Radices cognatæ q & s ortæ sint, erit summa duarum Componentium $\frac{C}{1-qz}+\frac{D}{1-sz}=\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$.

Idcirco, si dividatur semicircumferentia cujus radius est 1, in partes æquales quarum multitudo designetur per n; deinde ex primo, tertio, quinto & impari quoque divisionis termino demittantur ad diametrum perpendicula quibus determinentur Cosinus a, b, c, d &c. totidem Arcuum ab eodem diametri termino incipientium; tunc erit $\frac{1}{1+z^n}=\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}az}{1-2az+zz}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}cz}{1-2cz+zz}$ &c. hæc vero series ad tot terminos est continuanda quot sunt unitates in $\frac{1}{2}n$.

PROBLEMA II.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1+z^n}$, *in qua* n *ponatur esse numerus impar, eam in simpliciores resolvere.*

S O-

SOLUTIO.

Fingatur $1+z^n=0$: hujus Æquationis Radices sint $m, p, q, s \ldots\ldots t$ quarum primæ binæ sint radices cognatæ Æquationis quadraticæ $1-2az+zz=0$, secundæ binæ sint radices cognatæ Æquationis quadraticæ $1-2bz+zz=0$, & sic deinceps usque dum exhauriantur Cosinus omnes a, b, c, d &c. quorum multitudo designatur per $\frac{n-1}{2}$, Sit etiam t radix ultima residua quæ quidem erit æqualis unitati negative sumptæ, utpote quæ genita sit ex Æquatione $1+z=0$ per quam Æquatio $1+z^n=0$ dividi potest. His positis resolvetur Ordinata data in Componentes $\frac{A}{1-mz}+\frac{B}{1-pz}+\frac{C}{1-qz}+\frac{D}{1-sz}$ &c. $+\frac{E}{1+z}$ quarum primæ binæ conficiunt summam $\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}az}{1-2az+zz}$, secundæ binæ conficiunt summam $\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$, & sic deinceps, ultima vero residua æqualis est fractioni $\frac{\frac{1}{n}}{1+z}$: iisdem igitur positis ac in superiori Problemate, erit $1+z^n=\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}az}{1-2az+zz}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}cz}{1-2cz+zz}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n}dz}{1-2dz+zz}$ &c. $+\frac{\frac{1}{n}}{1+z}$.

PROBLEMA III.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1-z^n}$, *in qua* n *ponatur esse numerus par, eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Fingatur $1-z^n=0$: Sint Radices hujus Æquationis $+1, m, p, q, s$ &c. -1, quarum m & p sint Radices cognatæ Æquationis $1-2az+zz,=0$; p & q Radices cognatæ Æquationis $1-2bz+zz=0$; $+1$ & -1 Radices extremæ ex divisore $1-zz$ natæ: his positis, si componentes sint $\frac{A}{1-z}, \frac{B}{1-mz}, \frac{C}{1-pz}, \frac{D}{1-qz}, \frac{E}{1-sz}$ &c. $\frac{F}{1+z}$, invenietur unaquæque quantitatum, A, B, C, D, E, F, per Methodum

thodum supra expositam æqualis esse quantitati $\frac{1}{n}$; erunt igitur Fractiones extremæ, $\frac{\frac{1}{n}}{1-z}$ & $\frac{\frac{1}{n}}{1+z}$; invenietur præterea summa binarum $\frac{B}{1-mz}$ & $\frac{C}{1-pz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+zz}$, itemque summa binarum $\frac{D}{1-qz}$ & $\frac{F}{1-sz}$ $= \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$ & sic de cæteris.

Quamobrem si dividatur Semicircumferentia cujus Radus sit 1, in partes æquales quarum multitudo sit n; deinde ex secundo, quarto, sexto, & pari quoque divisionis termino demittantur perpendicula ad Diametrum quibus determinentur Cosinus a, b, c, d &c: totidem Arcuum ab eodem diametri termino incipientium; tunc erit $\frac{1}{1-z^n} = \frac{\frac{1}{n}}{1-z} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$ &c. $+ \frac{\frac{1}{n}}{1+z}$

PROBLEMA IV.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1-z^n}$ *in qua* n *sit numerus impar, eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Fingatur $1-z^n=0$; sint hujus Æquationis Radices, 1, m, p, q, s &c. quarum m & p sint Radices cognatæ Æquationis $1-2az+zz=0$, q & s, Radices itidem cognatæ Æquationis $1-2bz+zz$, $=0$, &c. Denique $+1$ Radix unica superstes ex divisore $1-z=0$, nata: quibus positis, si sint $\frac{A}{1-z}$, $\frac{B}{1-mz}$, $\frac{C}{1-pz}$, $\frac{D}{1-qz}$, $\frac{E}{E-sz}$, fractiones componentes; per methodum ante expositam, invenietur unaquæque quantitatum A, B, C, D, E &c. esse $=\frac{1}{n}$, adeoque componens prima erit $=\frac{\frac{1}{n}}{1-z}$; invenietur præterea summa binarum $\frac{B}{1-mz} + \frac{C}{1-pz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+zz}$, itemque summa binarum $\frac{D}{1-qz} + \frac{F}{1-sz}$ $= \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$, & sic deinceps.

Quare

Quare si dividatur semicircumferentia circuli eodem modo quo præscriptum fuit in superiori Problemate, erit $\frac{1}{1-z^n} = \frac{\frac{1}{n}}{1-z} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}$ &c.

PROBLEMA V.

Data Ordinata hujus formæ $1-2lz^n+z^{2n}$ *in qua* l *ponatur esse minor Unitate, eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Resumptis Æquationibus binis $1-2lz^n+z^{2n}=0$, & $1-2xz+zz=0$ sint m, p, q, s &c. Radices Æquationis prioris, quarum m & p sint etiam Radices posterioris ubi indeterminata x restricta fuerit ad cognitam a; jam ex eo quod sit $1-2lz^n+z^{2n}=0$, patet esse $z^n + \frac{1}{z^n} = 2l$, præterea ex eo quod sit $1-2az+zz=0$, patet summam Radicum hujus Æquationis esse $= 2a$, itemque factum ex earum multiplicatione esse $= 1$; habemus itaque 1° $m^n + p^n = 2l$, 2° $m+p=2a$, 3° $mp=1$: pone jam fractiones componentes in quas Ordinata data resolvenda sit, esse $= \frac{A}{1-mz}, \frac{B}{1-pz}, \frac{C}{1-qz}, \frac{D}{1-sz}$, &c. ergo primæ binæ ad se invicem additæ conficient summam $\frac{A-mBz+B-pAz}{1-mz-pz+mpzz}$; sed ex secundo Lemmate est $A=\frac{m^{\lambda-1}}{\mu}$, ubi scilicet λ seu $2n$ est Index altissimæ potestatis Æquationis $1-2lz^n+z^{2n}=0$, itemque ex tertio Lemmate est $\mu=2nz^{2n-1}-2nlz^{n-1}$, sive, scripto m pro z, est $\mu=2nm^{2n-1}-2nlm^{n-1}$, erit igitur $A=\frac{m^{2n-1}}{2nm^{2n-1}-2nlm^{n-1}} = \frac{m^n}{2nm^n-2nl}$, & pari ratione erit $B=\frac{p^n}{2np^n-2nl}$, adeoque summa $A+B$ erit $=$

$$\frac{2np^nm^n+2lnm^n+2np^nm^n-2lnp^n}{4nnp^nm^n-4nnlp^n-4nnlm^n+4nnll}$$

sed propter $m^n+p^n=2l$, &

$mp = 1$. Sequitur summam $A + B$ redactum iri ad $\frac{4n \times \overline{1 - ll}}{4nn \times \overline{1 - ll}} = \frac{1}{n}$; Porro summa $pA + mB = \frac{pm^n}{2nm^n - 2nl} + \frac{mp^n}{2np^n}$, sed propter $m + p = 2a$, & $mp = 1$. hæc summa redigetur ad $\frac{\overline{2a - l} \times \overline{m^{n-1} + p^{n-1}}}{2n \times \overline{1 - ll}}$, sed quo jure est $m^n + p^n = 2l$, eodem jure erit $m^{n-1} + p^{n-1} = 2e$, modo intelligatur e esse Cosinus Arcus ejus qui sit ad Arcum cujus Cosinus est a, ut $n - 1$ ad 1, unde tandem fit ut $pA + mB$ sit $= \frac{a - le}{n - lln}$; erit igitur summa duarum fractionum $\frac{A}{1 - mz} + \frac{B}{1 - pz} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{a - le}{n - lln} z}{1 - mz - pz + mpzz} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{a - le}{n - lln} z}{1 - 2az + zz}$, & eodem processu, fractiones quæque binæ reliquæ in unum addi poterunt.

Quapropter si sit A Arcus Quadrante minor cujus Cosinus sit l ad Radium 1, C circumferentia tota; a, b, c, d &c. Cosinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{C - A}{n}$, $\frac{C + A}{n}$, $\frac{2C - A}{n}$, $\frac{2C + A}{n}$ &c. e, f, g, h &c. Cosinus eorum Arcuum qui singuli ad singulos Arcus antecedentes eodem ordine sumptos eam rationem habeant quam habet numerus $n - 1$ ad Unitatem; tunc erit $\frac{1}{1 - 2lz^n + z^{2n}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{a - le}{n - lln} z}{1 - 2az + zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{b - lf}{n - lln}}{12 - 2bz + zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{c - lf}{n - lln} z}{1 - 2cz + zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{d - lh}{n - lln}}{1 - 2dz + zz}$ &c.

PROBLEMA VI.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1 - 2lz^n + z^{2n}}$, *in qua* l *sit major Unitate, eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Fac $l + \sqrt{ll - 1} = m$, $l - \sqrt{ll - 1} = p$; pone insuper $x = z\sqrt[n]{m}$ & $y = z\sqrt[n]{p}$; quo facto, Ordinata data resolvetur in hasce duas

$\frac{m}{m - p}$

$\frac{m}{m-p} \times \frac{1}{1-x^n} = \frac{p}{m-p} \times \frac{1}{1-y^n}$, quarum utraque ex Prob. 3. & 4. ad componentes suas adducetur.

PROBLEMA VII.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1+2lz^n+z^{2n}}$ *in qua ponatur esse* l *Unitate minor, eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Sit *A* Arcus quadrante major cujus Cosinus sit *l* ad Radium 1, *C* circumferentia tota: sint præterea *a, b, c, d &c.* Cosinus arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$ *&c.* itemque sint *e, f, g, h, &c.* Cosinus Arcuum quorum unusquisque ad unumquemque Arcum antecedentem eam rationem habeat quæ est numeri $n-1$ ad 1; his positis, erit

$$\frac{1}{1+2lz^n+z^{2n}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{a+le}{n-lln}z}{1-2az+zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{b+lf}{n-lln}z}{1-2bz+zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{c+lg}{n-lln}z}{1-2cz+zz} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{d+lh}{n-lln}z}{1-2dz+zz} \;\&c.$$

PROBLEMA VIII.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1+2lz^n+z^{2n}}$, *in quo* l *sumatur esse Unitate major, eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Fac $l+\sqrt{ll-1}=m$, $l-\sqrt{ll-1}=p$, pone insuper $x=z\sqrt[n]{m}$ itemque $y=z\sqrt[n]{p}$, tunc ex supradictis perspicuum est Ordinatam datam divisum iri in has binas $\frac{m}{m-p} \times \frac{1}{1+x^n} - \frac{p}{m-p} \times \frac{1}{1+y^n}$, quarum utraque in simpliciores resolvi poterit.

PROBLEMA IX.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{e}{e+fz^n+gz^{2n}}$, *eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Pone $z^n = v^n\sqrt{\frac{e}{g}}$, $f = 2l\sqrt{ge}$; quibus positis, Ordinata data ad hanc adducetur $\frac{1}{1+2lz^n+z^{2n}}$, quæ ex supradictis in simpliciores poterit resolvi.

PROBLEMA X.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{e}{e+fz^n-gz^{2n}}$, *eam in simpliciores resolvere.*

SOLUTIO.

Pone $\frac{f+\sqrt{ff+4ge}}{2e} = m$, & $\frac{-f+\sqrt{ff+4ge}}{2e} = p$, tunc id facile percipietur Ordinatam datam, subsidio Lemmatis Secundi, divisum iri in has binas $\frac{m}{m+p} \times \frac{1}{1-mz^n} + \frac{p}{m+p} \times \frac{1}{1-pz^n}$, vel positis $mz^n = x^n$, & $pz^n = y^n$, in hasce binas alteras $\frac{m}{m+p} \times \frac{1}{1-x^n} + \frac{p}{m+p} \times \frac{1}{1-y^n}$.



LIBER

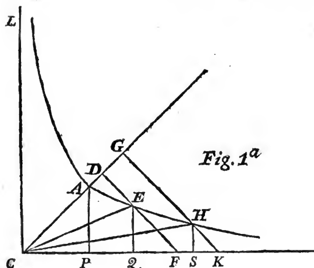


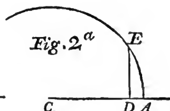
LIBER II.

Scholium ad praecedentia.

CAPUT I.

AD LEMMA I.







INeunte Anno 1707, vel aliquanto citius, ipse mihi Problema sequens solvendum proposueram.

In Hyperbola Æquilatera *A H* (Fig. 1.) cujus Centrum *C*, vertex *A*, Semiaxis *C A* æqualis Unitati, ducta ad Axim ordinata *DE* cui competit sector hyperbolicus

ACE, invenire ordinatam *GH*, cui competat sector hyperbolicus *ACH*, in ea ratione ad priorem quæ est n ad 1.

Tunc nominatis $DE\ \dot{y}$; & $HG\ \dot{v}$; inveneram Fluxionem sectoris *ACE* esse $\frac{\frac{1}{2}\dot{y}}{\sqrt{1+yy}}$, & Fluxionem sectoris *ACH* $\frac{\frac{1}{2}\dot{v}}{\sqrt{1+vv}}$ unde oriebatur proportio $\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+yy}}, \frac{\dot{v}}{\sqrt{1+vv}} :: 1, n$, e qua per Methodum Serierum deduxeram Æquationem $v = ny + \frac{nn-1}{2\times 3} y^3 A + \frac{nn-9}{4\times 5} y^5 B + \frac{nn-25}{9\times 7} y^7 C$ &c. quæ analoga est seriei a Cl. Newtono jam pridem inventa ad divisionem Arcus in partes quotlibet æquales, etenim posito y sinu recto Arcus cujuslibet ad Radium 1, & v Sinu recto Arcus alterius qui sit ad priorem ut n ad 1, invenerat vir præstantissimus esse $v = ny + \frac{1-nn}{2\times 3} y^3 A + \frac{9-nn}{4\times 5} y^5 B + \frac{25-nn}{6\times 7} y^7 C$ &c. ubi quantitates A, B, C &c. designant Coefficientes terminorum antecedentium ita sit $A = n$, $B = \frac{1-nn}{2\times 3}$, $C = \frac{9-nn}{4\times 5}$ &c.

Postquam eo usque processeram, duxi Asymptotos *CK*, *CL*, deinde productis Ordinatis *DE*, *GH*, donec eæ occurrerent Asymptoto *CK* in *F* & *K*, duxi *AP*, *EQ* ad eandem Asymptoton normales; jam cum mihi constaret sectorem *ACE* spatio *APQE*, & sectorem *ACH* spatio *APSH* esse æquales, & ea spatia esse logarithmos rationum $\frac{AP}{QE}$, $\frac{AP}{SH}$, sive propter similia Triangula *ACP*, *EQF*, *HSK*, rationum $\frac{AC}{EF}$, $\frac{AC}{HK}$, sive $\frac{1}{EF}$, $\frac{1}{HK}$, conclusi logarithmum rationis $\frac{1}{EF}$ ad logarithmum rationis $\frac{1}{HK}$ esse ut 1 ad n, proindeque esse $EF^n = HK$, sed ex eo quod fuerat *DE* dicta y, & *GH*, v; facili calculo elicui esse $EF = \sqrt{1+yy} - y$, & $HK = \sqrt{1+vv} - v$, adeoque in prædicta Æquatione $v = ny + \frac{nn-1}{2\times 3} y^3 A + \frac{nn-9}{4\times 5} y^5 B + \frac{nn-25}{6\times 7} y^7 C$ &c. (quæ semper finita evadit quando est n numerus impar) potui invenire y ex data v, quo factum est ut mihi patuerit methodus solvendi Æquationes quasdam potestatis quintæ, septimæ, nonæ &c. in infinitum: etenim ex eo quod sit $\overline{\sqrt{1+yy}-y}|^n = \sqrt{1+vv} - v$ si ponatur $\sqrt{1+vv} - v = s$, inde erit $\sqrt{1+yy} - y = s^{\frac{1}{n}}$, sive, $1+yy$ =

$= s^{\frac{2}{n}} + 2ys^{\frac{1}{n}} + yy$, quapropter deleto utrinque yy, erit $2ys^{\frac{1}{n}} = 1 - s^{\frac{2}{n}}$, five $2y = \frac{1}{s^{\frac{1}{n}}} - s^{\frac{1}{n}}$, adeoque erit $y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+vv}-v}} - \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+vv}-v}$.

Sumatur $n = 5$. & $v = 4$, tunc Æquatio generalis ad hanc reſtringetur $5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$, quo in caſu invenietur Radix $y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{4+\sqrt{17}}} - \frac{1}{2}\sqrt[5]{4+\sqrt{17}} = 0.4313$ proxime.

Jam vero ut experirer num poſſet Formula ſuperior, mutatis mutandis, ad Æquationem Newtonianam transferri, poſui ut ante $\sqrt{1+vv} - v = s$, ſive $ss + 2sv = 1$, poſui etiam $\sqrt{1+yy} - y = z$, ſive $zz + 2zy = 1$. jam ex ſupra demonſtratis, eſt $s = z^n$, adeoque ſubſtituto z^n in locum quantitatis s, habui has binas Æquationes, nimirum

$$z^{2n} + 2z^n v = 1$$

$$zz + 2zy = 1$$

$$\text{Sive } vv = \frac{1 - 2z^{2n} + z^{4n}}{4z^{2n}}$$

$$\& \; yy = \frac{1 - 2zz + z^4}{4zz}$$

Quapropter, cum Centro C, Radio $CA = 1$ (Fig. 2) deſcripſiſſem Circulum AE, tum e puncto E demiſiſſem ED perpendicularem in Radium, id mihi facile venit in mentem, quod cum Æquatio ad Circulum ſit $CAq - CDq = DEq$, ſive $CDq - CAq = -DEq$, Æquatio vera ad Hyperbolam æquilateram ſit $CDq - CAq = +DEq$, nihil aliud faciendum mihi incumberet quam ut ſigna mutarem quadratorum vv & yy, quod cum factum fuiſſet, habui Æquationes binas ad circulum, has ſcilicet

$$-vv = \frac{1 - 2z^n + z^{4n}}{4z^{2n}}$$

$$\& \; -yy = \frac{1 - 2zz + z^4}{4zz}$$

Sive

Sive $1 - vv = \frac{1 + 2z^n + z^{4n}}{4z^n}$

& $1 - yy = \frac{1 + 2zz + z^4}{4zz}$.

in quibus v deſignat ſinum rectum Arcus cujuſcunque, & y ſinum rectum Arcus alterius qui ſit in ea ratione ad priorem ut 1 ad n.

Poſitis jam $1 - vv = ll$, & $1 - yy = xx$ habui.

$$ll = \frac{1 + 2z^n + z^{4n}}{4z^n}$$

& $xx = \frac{1 + 2zz + z^4}{4zz}$, tunc extractis radicibus habui

$$l = \frac{1 + z^{2n}}{2z^n}$$

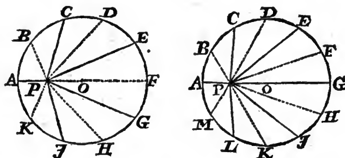
& $x = \frac{1 + zz}{2z}$ Æquationes ad Coſinus.

Ex priore noviſſimarum Æquationum deduxeram $z = \sqrt[n]{l + \sqrt{ll - 1}}$ ex poſteriore vero $x = \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{1}{2}z$, ſicque demum concluſeram eſſe $x = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l + v\sqrt{ll - 1}}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{ll - 1}}$, ſed cum mihi conſtaret Æquationes ad Sinus rectos ſub eadem forma exhibitum iri ac Æquationes ad Coſinus, ubi eſt n numerus impar; in locum præcedentis concluſionis, hanc ſubſtitueram nimirum, in Æquatione Newtoniana, $ny + \frac{1 - nn}{2 \times 3} Ay^3 + \frac{9 - nn}{4 \times 5} By^5 + \frac{25 - nn}{6 \times 7} Cy^7$ &c. $= v$, ſi ſit n numerus impar, quo fit ut Æquatio finita evadat, tunc fore $y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{+v + \sqrt{vv - 1}}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{+v + \sqrt{vv - 1}}$, vel $y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{-v + \sqrt{vv - 1}}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{-v + \sqrt{vv - 1}}$, pro ut $\frac{n - 1}{2}$ fuerit numerus par aut impar, cujus variationis ſignorum ratio ſatis intelligitur ex ſolo conſpectu Æquationum ad Sinus & Coſinus in caſibus imparibus.

Quan-

Quanquam vero valor quantitatis y prodeat sub forma imaginaria, cum ad Sinus Arcuum restringitur, attamen hanc expressionem valoris y non ut inutilem judicaveram, utpote quæ ad casus alios posset transferri, nempe si ita accideret ut v foret unitate major.

Hæ autem conclusiones prodierant absque demonstratione in *Actis Philosophicis pro mensibus Jan. Feb. & Mart. Anni* 1707. ex quo tempore eas prorsus neglexeram, donec a me resumptæ essent occasione data ex Cl. *Cotesii* Libro, ubi is primum lucem videre cœpit: etenim cum inter plurima admiratione digna illic reperienda, notabilem obtineat locum Theorema quoddam de divisione Circuli ab eximio illo Mathematico inventum, sed non demonstratum, maximo sensi me affectum desiderio ejus demonstrationem assequendi, quod eo usque processit ut vix quidquam ardentius unquam expetiverim, quo factum est ut cum paulisper in hac contemplatione moratus essem, debilis mihi suborta esset spes scopum attingendi, sed non diu hæsi quin me id posse consequi pro certo haberem, revocantem scilicet in mentem pauca quædam istis affinia in secunda Editione libri mei de Sorte, sed præsertim ea quæ de Æquationibus ad Circulum olim excogitaveram. Theorema autem Cotesianum sic se habet.



'Si quærantur Factores Binomii $a^\lambda \pm x^\lambda$, existente indice λ 'quolibet integro: dividatur Circumferentia *ABCD*, cujus centrum '*O* in totidem partes æquales quot sunt unitates in 2λ; & ab om'nibus divisionibus ad punctum quodvis *P* in *OA* radio, si opus sit 'situm, ducantur rectæ, *AP*, *BP*, *CP*, *DP*, *EP*, *FP* &c; deinde positis '$OA = a$, $OP = x$, contentum sub omnibus *AP*, *CP*, *EP* &c. 'sumptis a divisionibus alternis per integrum circuitum, adæquabit '$a^\lambda - x^\lambda$, vel $x^\lambda - a^\lambda$, pro ut *P* fuerit intra vel extra circulum: &

D 'con-

‘contentum sub reliquis BP, DP, EP &c. in locis reliquis alter-‘nis adæquabit $a^{\lambda}+x^{\lambda}$. Exempli gratia si λ sit 5, dividatur se-‘micircumferentia in 10 partem æquales, eritque $AP \times CP \times EP$ ‘$\times GP \times JP = OA^5 - OP^5$, existente P intra circulum, & $BP \times DP$ ‘$\times FP \times HP \times KP = OA^5 + OP^5$. Similiter si λ sit 6, divisa circum-‘ferentia in 12 partes æquales: erit $AP \times CP \times EP \times GP \times FP \times HP \times KP$ ‘$JP \times LP = OA^6 - OP^6$, existente P intra circulum, & $BP \times DP$ ‘$\times MP = OA^6 + OP^6$.

‘Ope Theorematis illius potuit Clarissimus Autor Fluentem inve-‘nire quantitatis cujuscunque quæ cum hac forma comparari potest ‘$\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n}$, ubi d, e, f denotant quantitates invariabiles, z va-‘riabilem, n indicem quemvis, θ numerum quemvis integrum, af-‘firmativum aut negativum, $\frac{\delta}{\lambda}$ quemlibet fractum; potuit etiam ex-‘hibere fluentem quantitatis $\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}$, vel etiam hujus ‘$\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$, absque ultra exceptione aut limitatione, si ‘θ ut supra denotaverit numerum quemvis integrum affirmativum ‘aut negativum, & λ denominator fractionis $\frac{\delta}{\lambda}$ denotaverit nume-‘rum quemlibet hujus seriei, 2, 4, 8, 16, 32 &c. sumpto quolibet ‘numero integro pro ejusdem numeratore δ.

Quid autem a nobis factum sit ut limitatio a Cl. autore allata rescinderetur, huc potissimum redit: Area Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{1+2lz^n+z^{2n}}$, converti potest in aliam sibi æqualem cujus ordinata sit $\frac{\frac{\lambda}{n}z^{\theta\lambda+\delta-1}}{1+2lz^{\lambda}+z^{2\lambda}}$, quod suo loco demonstrabitur, jam si sit l major unitate, hæc Ordinata poterit dividi in duas alteras Binomiales quarum utraque subsidio Theorematis Cotesiani in simplicissimas Ordinatas resolvetur, quo fiet ut Areæ his Ordinatis competentes futuræ sint aptæ quæ cum Areis Conicarum Sectionum comparentur; at vero si fuerit l minor unitate, non poterit hæc Ordinata dividi in Ordina-

tas

tas Binomiales, quod tamen fieri oporteret ut Theorema Cotesianum posset eas deinceps dividere in componentes suas simplicissimas, attamen Trinomium illud, in casu a Cl. Autore memorato, nempe si id in inciderit ut λ sit numerus quicunque seriei, 2, 4, 8, 16, 32 *&c.* poterit perpetuo dividi in Trinomia duo altera, quousque ad simplicissima devenias, sed non necessarie requiretur ut ullum Theorema ad id perficiendum adhibeatur, quod ut Exemplis pateat; sumatur Trinomium $1+2lz^4+z^8$, tunc si fingantur Trinomia duo $1+azz+z^4$, & $1+bzz+z^4$ e quorum mutuo ductu Trinomium datum generari intelligatur, facili comparatione emerget $a=+\sqrt{2-2l}$, & $b=-\sqrt{2-2l}$, adeoque Trinomium datum dividetur in hæc bina altera $1+\sqrt{2-2l}\times zz+z^4$, & $1-\sqrt{2-2l}\times zz+z^4$; porro ex eo quod Trinomium $1+2lz^4+z^8$ possit dividi in bina altera, Ordinata $\frac{1}{1+2lz^4+z^8}$ dividi poterit in binas simpliciores alteras quarum Denominatores sint $1+\sqrt{2-2l}\times zz+z^4$, & $1-\sqrt{2-2l}\times zz+z^4$; rursus horum Trinomiorum utrumque poterit ulterius dividi, prius scilicet in $1+\sqrt{2-\sqrt{2-2l}}\times z+zz$, & $1-\sqrt{2-\sqrt{2-2l}}\times z+zz$, posterius vero in $1+\sqrt{2+\sqrt{2-2l}}\times z+zz$, & $1-\sqrt{2+\sqrt{2-2l}}\times z+zz$, atque adeo si sit λ numerus quilibet assignatus in progressione geometrica 2, 4, 8, 16 *&c.* Trinomium datum ad simplicissima adducetur perpetua ut ita dicam bisectione; potuit igitur Vir Clarissimus, in casu memorato, per Radicalitates perpetuo crescentes tandem devenire ad Trinomia simplicissima, sed non ei licuit eodem processu uti, si quando esset λ numerus quicunque extra seriem datam assignatus; quanquam enim Trinomium *v. g.* $1+2lz^6+z^{12}$, possit dividi in duo Trinomia, & hæc rursus possint sigillatim dividi in bina altera quousque libitum erit, attamen ejusmodi divisione nunquam incides in Trinomia simplicissima hujus formæ $1+2az+zz$, $1+2bz+zz$, quod ratio quadraturarum necessario exigit ut fieri possit: ergo id requirebatur ut Methodus generalis inveniretur dissolvendi Trinomia data in tot Trinomia simplicia quot sunt unitates in indice λ, cui exequendo Theorema Cotesianum non sufficiebat; sed non satis erat ut id præciperetur Trinomia data in tot Trinomia simplicia dividi oportere quot sunt unitates in indice medii termini, nec satis erat ut Theorema Cotesianum ultra suos limites proveheretur, quanquam id quidem in hac re primum erat, sed id ulterius requirebatur, ut ex his jam perspectis & exploratis, conclusiones simplices

deducerentur; quod cum me fecisse putem, illud tamen fateor, nisi Cotesius facem prætulisset, me hanc Doctrinam resolutionis Trinomiorum ad hunc exitum nunquam fortasse perducturum fuisse. Qui autem videre cupit utilissimam Fluentium Tabulam quam Clarissimus *Smith* Astronomiæ & Philosophiæ experimentalis apud Cantabrigienses Professor dignissimus, hocce Cotesii principio adjutus condiderit, librum ipsum adeat mira ubique concinnitate & elegantia refertum & difficiliorum Problematum enodatione felicissima maxime insignem.

AD COROLLARIUM I.

Corollarium primum eximit Radicalitates quibus usi fueramus in Lemmate primo.

AD COROLLARIUM II.

Proponatur *v. g.* id inveniendum, quænam sit relatio inter Cosinum Arcus cujuslibet, & Cosinum quintæ ejus partis: Sit l Cosinus Arcus dati, & x Cosinus quintæ ejus partis, jam cum n, hoc in casu, evadat 5, habemus idcirco Æquationes binas

$1 - 2lz^5 + z^{10} = 0$, sive $1 + z^{10} = 2lz^5$ prior

& $1 - 2xz + zz = 0$, sive $1 + zz = 2xz$, posterior: attollatur Æquatio posterior ad potestatem quintam, hinc erit

$1 + 5zz + 10z^4 + 10z^6 + 5z^8 + z^{10} = 32x^5z^5$, sed ex priore, est $1 + z^{10} = 2lz^5$, adeoque erit

$$5 + 10zz + 10z^4 + 5z^6 = 32x^5z^3 - 2lz^3.$$

Attollatur nunc Æquatio posterior ad Cubum, eaque deinde multiplicetur per 5, tunc erit

$$5 + 15zz + 15z^4 + 5z^6 = 40x^3z^3$$

ex hac novissima Æquatione, subtrahe jam proximam superiorem tum reliquum divide per zz, hinc fiet

$5 + 5zz = 40x^3z - 32x^5z + 2lz$, sed ex posteriore Æquatione $5 + 5zz = 10xz$. Adeoque tandem prodit

$40x^3 - 32x^5 - 10x + 2l = 0$ sive

$16x^5 - 20x^3 + 5x - l = 0$ Æquatio qua definitur relatio inter l & x.

AD

AD COROLLARIUM III.

Æquationes Trinomiales $1 - 2lz^n + z^{2n} = 0$, & $1 - 2xz + zz = 0$ ortæ ſunt ex his binis $ll = \frac{1 + 2z^n + z^{4n}}{4z^{2n}}$ & $xx = \frac{1 + 2zz + z^4}{4zz}$ quemadmodum oſtenſum eſt in adnotatis ad Lemma primum, nimirum extractis ex utraque Æquatione radicibus quadraticis, jam ſi pro Radice quadrati ll ſcribatur $-l$, & pro Radice quadrati xx ſcribatur x ut antea, erunt Æquationes trinomiales $1 + 2lz^n + zz^n = 0$ & $1 - 2xz + zz = 0$, ubi jam l denotat Coſinum Arcus quadrante majoris, ſeu quod eodem recidit, ubi eſt $-l$ Coſinus Arcus dividendi in parte n; ſin, Radix quadrati ll ſumatur $-l$, & Radix quadrati xx ſumatur $-x$, erunt Æquationes trinomiales $1 + 2lz^n + z^{2n} = 0$, $1 + 2xz + zz = 0$, & Æquationes hinc oriundæ eædem erunt in caſibus imparibus ac ſi Æquationes ſumerentur hujus formæ $1 - 2lz^n + z^{2n} = 0$, & $1 - 2xz + zz = 0$; ſed in caſibus paribus, mutatio ſigni in quantitate x nullam inducit mutationem ſignorum in Æquationem emergentem, adeoque obſervata mutatione ſigni in quantitate l, Æquationes $1 \mp 2lz^n + z^{2n} = 0$, & $1 - 2xz + zz = 0$ ſufficient ad omnes caſus.

AD COROLLARIUM IV.

Sumuntur Arcus $\frac{A}{n}$, *&c.* $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$ *&c.* alternatim ad unam & alteram partem principii Arcum, etenim Arcus eo ordine ſumpti quo hic apponuntur ſe invicem ſuperant minimis differentiis, ita ut ſi ſit n numerus par, pars prior dimidia contineat eos Arcus quorum Coſinus ſunt affirmativi, pars vero poſterior eos contineat quorum Coſinus ſunt negativi.

Si ſit n numerus impar, talis tamen ut $\frac{n+1}{2}$ ſit numerus par, pars prior $\frac{n-1}{2}$ continebit eos Arcus quorum Coſinus ſunt affirmativi, pars vero poſterior illos continebit quorum Coſinus ſunt negativi; ſin vero, ſit $\frac{n+1}{2}$ numerus impar, pars prior $\frac{n+1}{2}$ continebit Coſinus affirmativos n, pars poſterior $\frac{n-1}{2}$, negativos.

Poſſunt ſumi Arcus $\frac{A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, $\frac{4C+A}{n}$, $\frac{5C+A}{n}$, $\frac{6C+A}{n}$ *&c.* Circulum eodem ordine ambiendo, intermiſſis $\frac{C-A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$ *&c.*

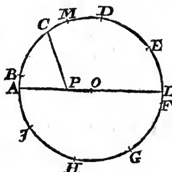
&c. & erunt poſt peractum circuitum puncta diviſionum eadem quæ prius.

Etenim ſi Diametro AL deſcribatur Circulus, atque ex utrovis Diametri termino ſumatur Arcus $AM = A$, & $AB = \frac{A}{n}$ ſumanturque etiam Arcus omnes BC, CD, DE, EF, FG, GH &c. æquales Arcui $\frac{C}{n}$, patet fore Arcus AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH ordinatim æquales Arcubus $\frac{A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, $\frac{4C+A}{n}$, $\frac{5C+A}{n}$, $\frac{6C+A}{n}$ &c. ultimus autem in hac ſerie reſpondet ei qui antea deſignabatur per $\frac{C-A}{n}$, penultimus vero illi reſpondet qui antea deſignabatur per $\frac{2C-A}{n}$, etenim erit ultimus terminus in hac ſerie $\frac{\overline{n+1}\times C+A}{n}$, quo ſubtracto ex C, erit Arcus reſiduus $\frac{C-A}{n}$, & ſic de cæteris.

Si in caſibus imparibus E ſit punctum terminans ultimum Arcum eorum qui ponuntur in ſemicircumferentia ABL, tunc erit Arcus LE ad LM ut AB ad AM; adeoque, ſive fuerit A quadrante minor, ſive quadrante major, Coſinus Arcuum, $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, iidem erunt in utroque caſu, præterquam quod Coſinus ii qui in priore caſu obvenerant affirmativi, in poſteriore fiunt negativi, & vice verſa: iſtud autem etiam deducitur ex natura Æquationum qua determinantur Coſinus Arcuum.

In

In casibus paribus, Cosinus quisque habet suum æqualem sub signo contrario; quod quidem demonstratione non indiget,



Si in casibus paribus sumatur $AM = A$, $AB = \frac{A}{n}$; deinde sumantur Arcus omnes BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, æquales $\frac{C}{n}$, erunt ut prius AB, AI, AC, AH, AD, AG, AE, $AF = \frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, $\frac{4C-A}{n}$, $\frac{4C+A}{n}$; sed non erit in casibus paribus LE ad LM ut AB ad AM, ut erat in imparibus, adeoque Radices Æquationis ex divisione Arcus AM exurgentis differunt omnino & toto genere a Radicibus Æquationis exurgentis ex divisione Arcus LM, istud vero etiam facile concludetur ex solo conspectu Æquationum ad Cosinus.

AD COROLLARIUM V.

Si in Radio OA sumatur e Centro O versus principium Arcuum Linea quælibet $OP = z$, atque ex puncto P ducatur ad punctum quodlibet C in circumferentia positum linea PC, sitque Cosinus Arcus $AC = x$, erit $PCq = 1 - 2xz + zz$, si sit AC quadrante minor, vel $1 + 2xz + zz$, si sit quadrante major, vel semper $1 - 2xz + zz$ habita ratione variationis signorum in Cosinibus affirmativis & negativis.

AD COROLLARIUM VII.

Si in Æquatione $1 - 2lz^n + z^{2n} = 0$, ponatur $l = -1$, tunc ex Æquationibus binis $1 + 2z^n + z^{2n} = 0$, & $1 - 2xz + zz = 0$, ex

pulsâ

pulsâ z, orietur Æquatio qua determinantur Cosinus semicircumferentiæ in partes n divisæ; etenim in serie $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, $\frac{4C-A}{n}$ &c. erit A semicircumferentia, cum ex Hypothesi Cosinus ejus sit $=-1$. Quamobrem hæc series Arcuum evadet, $\frac{A}{n}$, $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{7A}{n}$, $\frac{7A}{n}$ &c. ubi si sit n numerus par, patet Cosinum quemque bis repetitum iri, atque adeo Æquationem qua determinantur Cosinus isti fore quadraticam; jam est $1+z^n=0$, radix quadratica Æquationis $1+2z^n+z^{2n}=0$. Ergo ex Æquationibus binis $1+z^n=0$, $1-2xz+zz=0$, orietur, eliminata quantitate z, Æquatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum, $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{7A}{n}$ &c.

AD COROLLARIUM VIII.

Si ex Æquationibus binis $1+2z^n+z^{2n}=0$, $1-2xz+zz=0$, ubi nunc ponitur n numerus impar, expungatur z, orietur Æquatio qua determinantur Cosinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{7A}{n}$ &c. jam cum ultimus terminus hujus Seriei sit $\frac{7A}{n}$, seu universe $\frac{nA}{n}$, seu A, cujus Cosinus est -1; patet Cosinum istum genitum fuisse ex Æquationibus binis $1+2z+zz=0$, $1-2xz+zz=0$, inter se comparatis; divisa itaque Æquatione $1+2z^n+z^{2n}=0$, per $1+2z+zz=0$; si Quotus dicatur QQ, patet ex Æquationibus binis $QQ=0$, $1-2xz+zz=0$, expulsa z, orituram Æquationem qua determinantur Cosinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, &c. adeoque ex Æquationibus binis $Q=0$, $1-2xz+zz=0$, expulsa z, orituram Æquationem qua determinantur Cosinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$ &c. sed est QQ quotus Quantitatis $1+2z^n+z^{2n}$ divisæ per $1+2z+zz$, adeoque est Q quotus Quantitatis $1+z^n$ divisæ per $1+z$, patet igitur Corollarium octavum.

AD COROLLARIUM IX.

Si ex Æquationibus binis $1-2z^n+z^{2n}=0$, $1-2xz+zz=0$, ubi n ponitur numerus par, expungatur z, orietur Æquatio qua determinentur Cosinus circumferentiæ simplicis, duplicis, triplicis, quadruplicis &c. in partes n divisæ; etenim in apposita serie $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$ &c. est $A=0$, cum Cosinus ejus sit $=1$, adeoque hæc series evadet $\frac{0}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{2C}{n}$ . . . . $\frac{\frac{1}{2}nC}{n}$ seu $\frac{1}{2}C$, ubi Arcus singuli geminantur præter primum & ultimum; sed Cosinus Arcus primi est 1, adeoque genitus est ex Æquationibus binis $1-2z+zz=0$, $1-2xz+zz=0$, inter se comparatis; Cosinus vero Arcus ultimi est -1, adeoque genitus est ex Æquationibus binis $1+2z+zz=0$; $1-2xz+zz=0$, inter se comparatis; potest igitur Æquatio $1-2z^n+z^{2n}=0$ dividi per $\overline{1-2z+zz}\times\overline{1+2z+zz}$ sive per $\overline{1-z}|^2\times\overline{1+z}|^2$; divisâ itaque Æquatione per $\overline{1-z}|^2\times\overline{1+z}|^2$, si Quotus dicatur QQ, tunc ex Æquationibus binis $QQ=0$. $1-2xz+zz=0$, orietur, expulsâ z, Æquatio qua determinentur Cosinus Arcuum $\frac{C}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{2C}{n}$ &c. qui omnes obveniunt gemini, quapropter si Æquatio $1-z^n=0$, Radix nimirum quadratica Æquationis $1-2z^n+z^{2n}=0$, dividatur per $\overline{1-z}\times\overline{1+z}$ & Quotiens dicatur Q, tum ex Æquationibus binis $Q=0$, $1-2xz+zz=0$; orietur, expulsâ z, Æquatio simplicissima qua determinentur Cosinus Arcuum $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{3C}{n}$ &c.

AD COROLLARIUM X.

Si ex Æquationibus binis $1-2z^n+z^{2n}=0$, $1-2xz+zz=0$, ubi ponitur n numerus impar, eliminetur quantitas z; orietur Æquatio qua determinentur Cosinus Circumferentiæ simplicis, duplicis, triplicis, quadruplicis &c. in partes n divisæ; etenim in apposita serie $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$ &c. est $A=0$, cum sit Cosinus ejus $=1$, adeoque hæc Series evadit $\frac{0}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{3C}{n}$, $\frac{3C}{n}$ &c. ubi Arcus singuli geminantur

præter primum, fed Cofinus Arcus primi eft $=1$, adeoque genitus eft ex Æquationibus binis $1-2z+zz=0$, $1-2xz+zz=0$, inter fe comparatis; poteft igitur dividi $1-2z^n+z^{2n}$ per $1-2z+zz$ five per $\overline{1-z}\times\overline{1-z}$, adeoque facta divifione, fi Quotiens dicatur QQ, tunc ex Æquationibus binis $QQ=0$ & $1-2xz+zz=0$, orietur Æquatio qua determinentur Cofinus omnes præter primum. Quapropter fi ex Æquationibus binis $Q=0$, & $1-2xz+zz=0$, eliminetur z, orietur Æquatio qua determinentur Cofinus Arcuum $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{3C}{n}$ &c. adeoque, fi fint a, b, c, d &c. Cofinus iftorum Arcuum, Divifores quantitatis Q erunt $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, &c. quorum multitudo eft $\frac{n-1}{2}$, cui confequens eft ut Divifores quantitatis $1-z^n$ fint etiam $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$ &c. fed habet præterea Quantitas $1-z^n$ Diviforem unum binomialem $1-z$.

Itaque, cum circumferentiam in partes æquales dividi præcepi, atque ex pari quoque divifionis termino perpendicula ad Diametrum demitti, quibus determinarentur Cofinus totidem Arcuum ab eodem diametri termino incipientium, patet Cofinus -1, & $+1$ ex Cofinuum præcedentium numero exclufos fuiffe, nec quidem id poteft proprie dici, perpendiculum ad Diametrum demitti ex eo puncto quod in Diametro locatur.

Igitur, non modo inventi funt Divifores trinomiales Binomiorum $1+z^n$, $1-z^n$, fed & divifores trinomiales Trinomii $1+2lz^n+z^{2n}$, five Trinomium illud potuerit dividi in Binomia, five non potuerit.

CAPUT II.

AD LEMMA II.

Poft editum Tractatulum de Menfura fortis Actis Philofophicis, pro Menfibus Jan. Feb. Mart. Anno 1711. infertum, multa mihi occurrere obfervatu digna circa Series quafdam quarum termini ita funt conftituti, ut eorum quilibet ad totidem antecedentes femper habeat rationes datas; etenim cum in Solutione generali Problematis de Duratione Ludorum, tales obveniffent Series, quod quidem eo tempore fuerat a me obiter animadverfum, credideram me non male collocaturum operam, fi earum proprietates quam accurate

curate poteram exquirerem: & quidem cum aliquid temporis in hac Speculatione impendissem, plurima ad hanc rem spectantia mihi comperta fuere, quarum ope mihi patuit Solutio difficiliorum aliquot Problematum quæ, cum ad Doctrinam Ludorum præcipue spectarent, fuerant a me exhibita in libro Anglice conscripto circa Ludos, & Anno 1716 in lucem emisso; sed cum Demonstrationes aliquot prætermisissem, eas Chartis commissas apud Cl. *Newtonum* 22° Maii 1718 reposueram, donec per biennium ab eo servatas, cum quibusdam aliis, coram Regia Societate protuleram 5° Maii 1720: excerpta autem quædam ex iis, instigante viro eruditissimo *Johanne Machin* Societatis Regiæ Secretario, publici juris facta sunt, Anno 1722: jam omnia quæ ad hoc Lemma spectant una cum Methodo Investigationis huc transferenda censui.

Si Series aliqua ita sit constituta, ut assumptis in ea ad libitum terminis quotlibet, terminus quisque subsequens ad eundem semper antecedentium numerum habeat rationes datas, talem seriem voco recurrentem; hujusmodi est subjecta Series.

$$\begin{matrix} A & B & C & D & E & F \\ 1 + 2x & + 3xx & + 10x^3 & + 34x^4 & + 97x^5 & \&c. \end{matrix}$$ in qua

$$D = 3Cx - 2Bxx + 5Ax^3.$$
$$E = 3Dx - 2Cxx + 5Bx^3.$$
$$F = 3Ex - 2Dxx + 5Cx^3.$$
&c.

Quantitates autem $3x - 2xx + 5x^3$, vel etiam $3 - 2 + 1$ simul sumptas subque propriis suis signis connexas, voco Indicem seu Scalam relationis.

THEOREMA I.

Si sit Progressio geometrica terminorum A, B, C, D, E *&c. quorum unusquisque sit ad proxime antecedentem ut* m *ad* 1; *poterit assignari relatio quædam constans, termini cujusque hujus progressionis, ad terminos duos proxime antecedentes.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ex eo quod sit $C = mB$, atque $B = mA$; multiplicetur posterior Æquatio per numerum quemlibet p, erit igitur $pB = mpA$. Sive $pB - mpA = o$.

Porro si ad $C = mB$
Addatur $pB - mpA = o$

 Summa

$$\text{Summa erit } C = \overline{m+p} \times B - mpA$$
$$\text{Eodem modo erit } D = \overline{m+p} \times C - mpB$$
$$\text{Et } E = \overline{m+p} \times D - mpC$$
&c.

erit igitur ſcala relationis $\overline{m+p} - mp$ quæ, propter p ad libitum aſſumptum, poterit infinite variari.

THEOREMA II.

Si detur Progreſſio geometrica terminorum A, B, C, D, E *&c. talis ut ratio termini cujuſlibet ad proxime antecedentem ſit ut* m *and* 1, *poterit aſſignari relatio quædam conſtans, termini cujuſque hujus progreſſionis, ad terminos tres proxime antecedentes.*

DEMONSTRATIO.

Etenim per Theorema I. eſt $\begin{array}{l} D = mC - mpB, \\ \quad\;\; + pC \end{array}$ & $\begin{array}{l} C = mB - mpA, \\ \quad\;\; + pB \end{array}$

ſive multiplicata poſteriori hac Æquatione per numerum quemlibet q, & tranſpoſitione facta, $\begin{array}{l} qC - mqB + mpqA = 0. \\ \qquad\;\;\; - pqB \end{array}$ Quamobrem

$$\begin{array}{ll} \text{Si ad} & D = mC - mpB \\ & \qquad\; + pC \\ \text{addatur} & + qC - mqB + mpqA = 0 \\ & \qquad\;\; - pqB \end{array}$$

$$\text{erit } D = \overline{m+p+q} \times C - \overline{mp+mq+pq} \times B + mpqA$$

$$\text{erit itidem } E = \overline{m+p+q} \times D - \overline{mp+mq+pq} \times C + mpqB$$

& ſic deinceps.

THEOREMA III.

Si detur Progreſſio geometrica terminorum A, B, C, D, E *&c. talis ut ratio termini cujuſque ad proxime antecedentem ſit ut* m *ad* 1; *poterit aſſignari relatio quædam conſtans, termini cujuſque hujus progreſſionis, ad terminos quatuor proxime antecedentes.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Per Theorema II. assumptis ad libitum numeris p & q, erit

$$\begin{array}{l} E = mD - mpC + mpqB \\ \quad + pD - mqC \\ \quad + qD - pqC \end{array}$$

Sed est $\begin{array}{l} D = mC - mpB + mpqA \\ \quad + pC - mqB \\ \quad + qC - pqB \end{array}$

Sive multiplicatâ hac posteriori Æquatione per numerum quemlibet s, & factâ transpositione, erit

$$\begin{array}{l} sD - msC + mpsB - mpqA \\ \quad - psC + mqsB \\ \quad - qsC + pqsB \end{array}$$

Ergo si ad primam Æquationem, addatur hæc novissima, erit $E = \overline{m+p+q+s} \times D - \overline{mp+mq+pq+ms+ps+qs} \times C + \overline{mpq+mps+mqs+pqs} B - mpqsA$, pergit autem Series talium relationum in infinitum, & lex Continuationis in promptu est.

COROLLARIUM I.

Si constituantur Progressiones duæ geometricæ, tales ut ratio terminorum in priore sit ut m ad 1, in posteriore vero ut p ad 1, tum addantur termini respondentes ambarum Serierum; dabitur relatio summæ cujuslibet ad summas binas proxime antecedentes, quæ quidem relatio erit invariabilis.

Etenim sint A, B, C, termini tres 1æ progressionis
H, K, L, termini tres 2æ.

Cum vero sit ex primo Theoremate $C = \overline{m+p} \times B - mpA$

itemque $L = \overline{p+m} \times K - mpH$

consequens est ut futurum sit $C + L = \overline{m+p} \times \overline{B+K} - mp \times \overline{A+H}$

COROLLARIUM II.

Si ponatur $x - m = 0$, itemque $x - p = 0$, tum multiplicetur $x - m$ per $x - p$, ut habeatur Æquatio $\begin{array}{l} xx - mx + mp = 0, \\ \quad - px \end{array}$ deinde,

de deleatur 1us terminus, tum dividantur reliqui ordinatim per x, 1. postremo mutentur signa omnia, eo pacto obtinebitur Scala relationis in Serie emergente ex summis prædictarum progressionum, quæ Scala proinde erit $\overline{m+p-mp}$.

Eodem modo, si dentur tres Progressiones geometricæ quarum rationes sint m, p, q; ponatur $x-m=o$, $x-p=o$, $x-q=o$. Multiplicentur hæ Æquationes in se invicem ut habeatur Æquatio $x^3-mxx+mpx-mpq=o$; Deinde deleatur

$$\begin{array}{l} -pxx+mqx \\ -qxx+pqx \end{array}$$

Primus terminus, tum dividantur reliqui ordinatim per xx, x, 1 postremo mutentur signa omnia, hinc obtinebitur Scala relationis in Serie emergente ex summis prædictarum progressionum, quæ Scala proinde erit

$$\begin{array}{lll} m & -mp & +mpq \\ +p & -mq & \\ +q & -pq. & \end{array}$$

COROLLARIUM III.

Si sit Series aliqua ita constituta, ut Terminus quisque ad duos proxime antecedentes semper habeat ratione datas, ponaturque Scala relationis $a-b$, tum fingatur $xx-ax+b=o$, cujus Æquationis Radices sint m & p; poterit dividi Series data in Progressiones duas geometricas, quarum rationes sint m & p.

Pari ratione, si detur Series aliqua recurrens cujus Scala relationis sit $a-b+c$; tum fingatur $x^3-axx+bx-c=o$, cujus Æquationis Radices sint m, p, q; poterit dividi Series data in Progressiones tres geometricas, quarum rationes sint m, p, q, atque idem est processus in infinitum.

COROLLARIUM IV.

Si detur Series aliqua recurrens cujus Scala relationis utcunque componatur ex data partium multitudine; termini omnes alterni ad antecedentes alternos, referuntur per datam relationis Scalam ex totidem partibus constantem, quot partibus constat Scala Seriei propositæ.

Etenim sint A, B, C, D, E &c.
F, G, H, K, L &c. Progressiones duæ genitrices Seriei propositæ; sit, in priori, ratio termini cujusque ad anteceden-tem

tem ut m ad 1, in posteriori vero, ut p ad 1. Sit Series genita ex summis terminorum respondentium utriusque Seriei,

P, Q, R, S, T &c.

Jam vero cum Termini A, C, E &c. alternatim sumpti constituant Progressionem geometricam in quâ ratio termini cujusque ad antecedentem sit ut mm ad 1, itidemque Termini F, H, L &c. alternatim sumpti constituant Progressionem geometricam in qua ratio Termini cujusque sit ad antecedentem, ut pp ad 1. palam fit ex primo Theoremate fore $E = \overline{mm + pp} \times C - mmppA$.

itemque $L = \overline{mm + pp} \times H - mmppF$.

proindeque fore $E + L = \overline{mm + pp} \times \overline{C + H} - mmpp \times \overline{A + F}$.

sive $T = \overline{mm + pp} \times R - mmpp \times P$.

Si igitur in Serie aliqua recurrente, $a - b$ sit data relationis Scala, atque ex ea conficiatur Æquatio $xx - ax + b = 0$, ponatur etiam $xx = z$, tum ope harum Æquationum eliminetur z, orietur Æquatio $zz + 2bz + bb = 0$, ex qua deducetur Scala relationis $aa - bb$.
$\quad - aaz \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2b$

Adeoque si detur Series, P, Q, R, S, T, cujus relationis Scala sit $a - b$, dabitur $T = aa \times R - bbP$ quæ relatio pertinet ad terminos
$\qquad\qquad - 2b$

Seriei alternos.

N. B. Si Radices Æquationis $xx - ax + b = 0$ sint rationales, eæque vocentur m & p, statim conficietur Scala relationis $mm - mp$;
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + pp$

sin vero sint irrationales, Scala relationis commodius ex Æquatione $zz + 2bz + bb = 0$ deducetur.
$- aaz$

Eodem modo, si Scala relationis Seriei propositæ componatur ex tribus partibus $a - b + c$; deinde ex hac Scala conficiatur Æquatio $x^3 - axx + bx - c = 0$, postremo ponatur $xx = z$: tum ope istarum Æquationum expellatur x; orietur Æqnatio $z^3 + 2bzz + bbz -$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - aazz - 2acz$

$cc = 0$, e qua deducetur Scala relationis, nimirum $aa + 2ac + cc$,
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2b - bb$

quæ spectat ut antea ad Terminos Seriei alrernos.

Atque, pari ratione, invenietur Scala relationis pro terminis Seriei propositæ, binis vel ternis vel quaternis intervallis a se invicem distan-

diſtantibus, ponendo nempe x^3, vel x^4, vel x^5 &c. $=z$, quantuſcunque fuerit numerus partium Scalæ propoſitæ.

COROLLARIUM V.

Si detur Series aliqua recurrens cujus termini multiplicentur ordinatim per terminos Progreſſionis geometricæ, ſinguli per ſingulos reſpondentes, ſitque Relationis Scala Seriei recurrentis $a-b$, ſit vero ratio termini cujuſque progreſſionis geometricæ, ad proximum antecedentem ut m ad 1; ſint etiam A, B, C, D, E &c. termini Seriei novæ ex hac multiplicatione exurgentis, tunc erit $E=aDm-bCmm$, $D=aCm-bBmm$ &c. Eodem modo ſit ſit Scala relationis Seriei propoſitæ $a-b+c$, tunc erit in Serie exurgente $E=aDm-bCmm+cBm^3$ & ſic deinceps in infinitum.

COROLLARIUM VI.

Si dentur Series binæ recurrentes, quarum termini reſpondentes in ſe invicem multiplicentur, ſinguli per ſingulos; dabitur Scala relationis in Serie ex hac multiplicatione oriunda. Sit Exempli gratia $a-b$ Scala relationis Seriei prioris, ſit etiam $c-d$ Scala relationis poſterioris; jam ſi dividatur poſterior in progreſſiones binas geometricas, per quas multiplicetur Series prior; tum orientur ex hac Multiplicatione Series duæ recurrentes quarum relationis Scalæ dabuntur, ſed datur Relationis Scala hujus ſummæ per Coroll. II, & III. adeoque datur Scala relationis in Serie emergente ex multiplicatione prædicta.

Res aliquanto expeditius conficietur ſequenti modo: ex Scala priore formetur Æquatio $xx-ax+b=0$, ex Scala poſteriore formetur Æquatio $yy-cy+d=0$, pone $xy=z$, tunc ope trium Æquationum ſupra poſitarum, expungantur x & y, & obtinebitur Æquatio

$$z^4-acz^3+\begin{matrix}bccz z\\-2bd\\+aad\end{matrix}-abcdz+bbdd=0$$

e qua conficietur Scala Relationis $ac-\begin{matrix}bcc\\+2bd\\-aad\end{matrix}+abcd-bbdd$, ubi illud obſervari poteſt, quod ſi ita acciderit ut a ſit $=c$, itemque $b=d$, tunc relationis Scala quæ hoc in caſu evadit $aa-\begin{matrix}2aab\\+2bb\end{matrix}+aabb-b^4$ poterit

terit ad tres terminos restringi; etenim multiplicatâ hac Scalâ ordinatim per terminos progressionis geometricæ, x, xx, x^3, z^4, subtrahantur termini producti, ex Unitate, ut habeatur residuum

$$\begin{matrix} 1 - aax + 2aabxx - aabbx^3 + b^4x^4 \\ \quad\; - 2bbxx \end{matrix}$$

quo diviso per $1 - bx$, erit Quotiens

$$\begin{matrix} 1 - aax + aabxx - b^3x^3 \\ + bx - bbxx \end{matrix}$$

e quo conficietur simplicior Scala

$$\begin{matrix} aa - aab + b^3. \\ - b + bb \end{matrix}$$

THEOREMA IV.

Si detur Series aliqua recurrens cujus relationis Scala utcunque componatur ex data partium multitudine; dabitur in illa Serie terminus quilibet cujus locus sit assignatus.

DEMONSTRATIO.

Sit Series recurrens $a + br + crr + dr^3 + er^4$ &c.
cujus termini vocentur P, Q, R, S, T &c.
Sitque Scala relationis ex quatuor partibus conflata, ita ut sit $T = frS - grrR + br^3Q - kr^4P$, & sic de cæteris: fingatur Æquatio $x^4 - frx^3 + grrxx - br^3x + kr^4 = 0$, e Scala relationis desumpta; sint m, p, q, s Radices hujus Æquationis; poterit igitur Series proposita dividi in quatuor Progressiones geometricas sequentis formæ

$$\begin{matrix} A + Am + Amm + Am^3 + Am^4 \text{ \&c.} \\ B + Bp + Bpp + Bp^3 + Bp^4 \text{ \&c.} \\ C + Cq + Cqq + Cq^3 + Cq^4 \text{ \&c.} \\ D + Ds + Dss + Ds^3 + Ds^4 \text{ \&c.} \end{matrix}$$

unde, comparatione facta horum terminorum cum terminis Seriei propositæ, oriuntur quatuor Æquationes, quibus determinentur quantitates assumptæ A, B, C, D, nimirum

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= a \\ Am + Bp + Cq + Ds &= br \\ Amm + Bpp + Cqq + Dss &= crr \\ Am^3 + Bp^3 + Cq^3 + Ds^3 &= dr^3 \end{aligned}$$

quibus Solutis invenietur

$$A=\frac{\begin{array}{llll} dr^3 & -p\times crr & +pq\times br & -pqs\times a \\ & -q & +qs & \\ & -s & +qs & \end{array}}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$$

$$B=\frac{\begin{array}{llll} dr^3 & -q\times crr & +qs\times br & -qsm\times a \\ & -s & +qm & \\ & -m & +sm & \end{array}}{\overline{p-q}\times\overline{p-s}\times\overline{p-m}}$$

$$C=\frac{\begin{array}{llll} dr^3 & -s\times crr & +qs\times br & -smp\times a \\ & -m & +qm & \\ & -p & +sm & \end{array}}{\overline{q-s}\times\overline{q-m}\times\overline{q-p}}$$

$$D=\frac{\begin{array}{llll} dr^3 & -m\times crr & +mp\times br & -mpq\times a \\ & -p & +mq & \\ & -p & +pq & \end{array}}{\overline{s-m}\times\overline{s-p}\times\overline{s-q}}$$

REGULA GENERALIS.

Nominentur, ſuo quæque ordine, Radices *m*, *p*, *q*, *s* &c. prima, ſecunda, tertia, quarta &c. Radix; ſumantur tot termini Seriei propoſitæ quot ſunt partes in Scala Relationis, tum multiplicentur ordine retrogrado 1° ultimus horum terminorum per unitatem, 2° penultimus per ſummam Radicum **poſt demptam primam**, 3° antepenultimus per ſummam rectangulorum ſub ſingulis binis radicibus reliquis, 4° quartus ab ultimo per ſummam contentorum ſub ſingulis ternis reliquis, & ſic deinceps; tunc producta hæc omnia ſimul ſumpta, & ſignis alternatim affirmativis & negativis inter ſe connexa, conſtituent Numeratorem quantitatis cui æquatur *A*; porro Numerator quantitatis cui æquatur *B*, eadem ratione formatur ac antea, ſi modo dempſeris ſecundam radicem loco primæ, & ſic de cæteris.

Quod Denominatores attinet, ii hac ratione formantur; nimirum ex prima Radice ſubtrahantur ſeorſim reliquæ, multiplicentur quantitates omnes reſiduæ in ſe invicem, tunc productum omnium exhibebit

hibebit Denominatorem ejus Fractionis cui æquatur A; eodem modo formatur Denominator ejus fractionis cui B æquatur, demptis seorsim ex secunda Radice, Radicibus cæteris, multiplicatisque residuis in se invicem, & sic deinceps.

Jam ex sola inspectione earum Progressionum quibus Series proposita ponitur æqualis, palam est terminum quemlibet hujus Seriei cujus intervallum a primo termino designatur per l, æqualem fore quantitatibus $Am^l + Bp^l + Cq^l + Ds^l$, at vero quantitates omnes m, p, q, s, A, B, C, D jam determinatæ fuerunt, quamobrem datur terminus quilibet Seriei cujus locus sit assignatus.

Si loco Æquationis $x^4 - frx^3 + grrxx - br^3x + r^4 = 0$ sumeretur hæc altera $x^4 - fx^3 + gxx - bx + k = 0$; tunc foret

$$A = \frac{\begin{array}{l} d - p \times c + pq \times b - pq \times a \\ \quad\;\; -q \quad\; +ps \\ \quad\;\; -s \quad\; +qs \end{array}}{\overline{m-p} \times \overline{m-q} \times \overline{m-s}}$$

idemque dicendum de B, C, D, sed in expressione termini desiderati, potestas r^l supplenda erit, adeoque terminus desideratus erit $\overline{Am^l + Bp^l + Cq^l + Ds^l} \times r^l$.

COROLLARIUM.

Si sint m, p, q, s, Radices prioris Æquationis, tunc patet Seriem recurrentem, in infinitum productam, æqualem futuram fore Fractionibus $\frac{A}{1-m} + \frac{B}{1-p} + \frac{C}{1-q} + \frac{D}{1-s}$, quarum Numeratores A, B, C, D, determinantur ut antea.

THEOREMA V.

Si Unitas dividatur per Multinomium quodcunque a Radicalitate immune, Quotiens constituet Seriem recurrentem.

DEMONSTRATIO.

Divisâ Unitate per Multinomium $1 - fx + gxx - bx^3 + kx^4$, sit Quotiens $P + Qx + Rxx + Sx^3 + Tx^4$ &c. habebimus igitur hanc Æquationem $\frac{1}{1 - fx + gxx - bx^3 + kx^4} = P + Qx + Rxx + Sx^3 + Tx^4$ &c. Multiplicetur Quotiens per Divisorem; hinc orietur nova Æquatio,

 $1 =$

$$\begin{array}{llllll} 1 = P & + Qx & + Rxx & + Sx^3 & + Tx^4 & \&c. \\ & - fP & - fQ & - fR & - fS & \\ & & + gP & + gQ & + gR & \\ & & & - hP & - hQ & \\ & & & & + kP & \end{array}$$

ubi hæc potiſſimum obſervanda veniunt, 1° terminos omnes poſt primum, in ſecundo hujus Æquationis membro, nihilo fore æquales; 2° terminum primum ſolum conſiſtere; 3° ſecundum terminum ex duabus partibus conflari, tertium ex tribus, quartum ex quatuor, & ſic deinceps, donec perventum fuerit ad terminum eum quem ingreditur pars ultima kx^4; etenim terminus ille æque ac poſt illum reliqui omnes tot conſtant partibus quot ſunt partes in diviſore $1 - fx + gxx - hx^3 + kx^4$.

Ex eo igitur quod ſit $T - fS + gR - hQ + kP = 0$, ſequitur fore:

$T = fS - gR + hQ + kP$; & ob eandem rationem.

$S = fR - gQ + hP$

$R = fQ - gP$

$Q = fP$

ex quibus concludere licet, Coefficientes terminorum omnium poſt quatuor primos, ſi Diviſor ex quinque partibus, vel poſt quinque primos, ſi ex ſex partibus conſtet, & ſic deinceps, ad antecedentes ordine retrogrado ſumptos, referri per conſtantem Relationis Scalam, quæ Scala conficitur ex Diviſore $1 - fx + gxx - hx^3 + kx^4$ deleta unitate, mutatis ſignis, diviſiſque terminis reliquis ordinatim per x, x^2, x^3, x^4 &c. adeo ut Scala Relationis fiat $f - h + g - k$; jam vero cum hæc Scala reſpiciat tantummodo Coefficientes terminorum Seriei, ſi deſideres Scalam qua termini ipſi ad antecedentes referantur, nihil aliud faciendum erit quam ut Unitas deleatur ex Denominatore, mutenturque Signa terminorum reliquorum, ſervatis poteſtatibus quantitatis x, adeo ut Relationis Scala quæ terminos ipſos ſpectat futura ſit $fx - gxx + hx^3 - kx^4$.

Sed Relatio quarti termini ad omnes antecedentes, ſi Diviſor ex quinque, vel quinti, ſi ex ſex partibus conſtet &c. eadem quâ prius exprimitur Scala, omiſſo ejus ultimo termino; & Relatio termini huic proximi verſus principium Seriei ad omnes antecedentes, eandem ſibi poſtulat Scalam, omiſſis ultimis binis ejus terminis, & ſic de cæteris.

THE-

THEOREMA VI.

Si sumatur Æquatio quælibet $x^4-fx^3+gxx-hx+k=0$, *cujus Radices sint* m, p, q, s *erit.*

1° $-p-q-s=m-f$

2° $pq+ps+qs=mm-fm+g$

3° $-pqs=m^3-fmm+gm-h$.

DEMONSTRATIO.

Si dividatur Æquatio proposita per $x-m$, Quotiens prodibit absque residuo, sive, quod eòdem recidit, residuum æquabitur nihilò, cum ex Hypothesi quantitas m sit una ex Radicibus, sed Quotiens ille constituit Æquationem $x^3+\overline{m-f}\times xx+\overline{mm-fm+g}\times x+m^3-fmm+gm-h=0$, quæ quidem Æquatio complectitur radices reliquas p, q, s. Sed ex natura Æquationum, est

$-p-q-s=m-f$

$+pq+ps+qs=mm-fm+g$

$-pqs=m^3-fmm+gm-h$. Ergo constat Propositio.

COROLLARIUM I.

Cum ex supradictis pateat Fractionem quamlibet $\frac{1}{1-fr+grr-hr^3+kr^4}$, æquipollentem esse Seriei recurrenti $P+Qr+Rrr+Sr^3+Tr^4$ &c. quæ resolvi possit in tot fractiones componentes $\frac{A}{1-mr}+\frac{B}{1-pr}+\frac{C}{1-qr}+\frac{D}{1-sr}$, quot sint partes in Æquationis Scala, perspicuum est fractionem propositam, in eas ipsas componentes resolvi posse; sed ex quarto Theoremate

$$A=\frac{\begin{array}{llll}S & -p\,R & +pq\,Q & -pqsP\\ & -q & +ps & \\ & -s & +qs & \end{array}}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$$

Sive ex sexto

$$A=\frac{S+\overline{m-f}\times R+\overline{mm-fm+g}\times Q+\overline{m^3-fmm+gm-h}\times P}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$$

resolva-

resolvatur igitur Numerator in hunc modum

$$\begin{array}{l} S + mR + mmQ + m^3P \\ -fR - fmQ - fmmP \\ +gQ + gmP \\ -hP \end{array}$$

quo facto, ex mera inspectione quarti Theorematis id facile percipietur primam Columnam perpendicularem fore æqualem nihilo, itemque secundam, itemque tertiam, & sic deinceps, donec perventum fuerit ad ultimam quæ ex unico termino residuo m^3P constat; est igitur $A = \frac{mP}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$, sive propter P æqualem unitati est $A = \frac{m^3}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$, ob eandem rationem est

$$B = \frac{p^3}{\overline{p-m}\times\overline{p-q}\times\overline{p-s}}$$

$$C = \frac{q^3}{\overline{q-q}\times\overline{q-p}\times\overline{q-s}}$$

$$D = \frac{s^3}{\overline{s-p}\times\overline{s-q}\times\overline{s-m}}$$

COROLLARIUM II.

Si Fractio resolvenda in simpliciores, sit $\frac{r}{1-fr+grr-hr^3+kr^4}$ ponatur $P=0$, $Q=$u, tunc invenietur $A = \frac{mm}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$, $B = \frac{pp}{\overline{p-m}\times\overline{p-q}\times\overline{p-s}}$, $C = \frac{qq}{\overline{q-m}\times\overline{q-p}\times\overline{q-s}}$, $D = \frac{ss}{\overline{s-m}\times\overline{s-p}\times\overline{s-q}}$.

COROLLARIUM III.

Si Fractio resolvenda sit $\frac{rr}{1-fr+grr-hr^3+kr^4}$. tunc positis $P=0$, $Q=0$, $R=1$, invenietur $A = \frac{m}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$, $B = \frac{p}{\overline{p-m}\times\overline{p-q}\times\overline{p-s}}$, $C = \frac{q}{\overline{q-m}\times\overline{q-p}\times\overline{q-s}}$, $D = \frac{s}{\overline{s-m}\times\overline{s-p}\times\overline{s-q}}$.

CO-

COROLLARIUM IV.

Si Fractio resolvenda sit $\frac{r^3}{1-fr+grr-hr^3+kr^4}$, tunc positis $P=0$, $Q=0$, $R=0$, $S=1$, invenietur $A=\frac{1}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$, $B=\frac{1}{\overline{p-m}\times\overline{p-q}\times\overline{p-s}}$, $C=\frac{1}{\overline{q-m}\times\overline{q-p}\times\overline{q-s}}$, $D=\frac{1}{\overline{s-m}\times\overline{s-p}\times\overline{s-q}}$.

COROLLARIUM V.

Quamobrem si sit Fractio resolvenda $\frac{r^3}{1-fr+grr-hr^3+kr^4}$, poterit ea quatuor modis, hoc est uno semper amplius modo quam sit index Numeratoris, in simpliciores resolvi; nimirum ponendo $A=\frac{1}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$, vel $A=\frac{mr}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$, vel $A=\frac{mmrr}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$, vel $A=\frac{m^3r^3}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$. Idemque dicendum de reliquis B, C, D.

AD LEMMA III.

Methodus sumendi producta differentiarum unicuique Radici, & Radicibus reliquis interjacentium, in hoc nititur, quod differentiæ Radicum Æquationis cujuslibet tanquam Radices alterius cujusdam Æquationis spectari possint, quo fit, ex natura Æquationum, ut ultimus hujus novæ Æquationis terminus sit productum quæsitum.

Sit x Radix Æquationis cujuscunque, sit præterea v differentia inter duas quaslibet hujus Æquationis Radices, erit igitur $x+v$ etiamnum Radix Æquationis; quapropter si loco x scribatur $x+v$, obtinebitur nova Æquatio, e qua priore substractâ, residuoque diviso per v, prodibit Æquatio quæsita cujus ultimus terminus dabit productum quæsitum.

Sit, exempli gratia, Æquatio data $x^4-fx^3+gxx-hx+k=0$; loco x scribendo $x+v$, prodibit

x^4+

$$\begin{array}{l} x^4+4x^3v+6xxvv+4xv^3+v^4=0 \\ -fx^3-3fxxv-3fxvv-fv^3 \\ +gxx+2gxv+gvv \\ -hx-hv \\ +k \end{array}$$

e quâ si prior subtrahatur, residuumque dividatur per v, prodibit Æquatio

$$\begin{array}{l} v^3+4xvv+6xxv+4x^3=0 \\ \quad -fvv-3fxv-3fxx \\ \qquad +gv+2gx \\ \qquad\quad -h \end{array}$$

cujus terminus ultimus $4x^3-3fxx+2gx-h$ exhibet productum quæsitum, idem utique quod prodiret si sumeretur Fluxio Æquationis datæ $x^4-fx^3+gxx-hx+k=0$, incognita ad instar indeterminatæ spectatâ totoque diviso per Fluxionem indeterminatæ.

Sunt etiam alii quidam usus Methodi jam expositæ quos brevitatis gratia prætereo.

Quamobrem, si sint m, p, q, s radices Æquationis propositæ; palam est futurum fore ut sit

$$\begin{array}{l} 4m^3-3fmm+2gm-h=\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s} \\ 4p^3-3fpp+2gp-h=\overline{p-m}\times\overline{p-q}\times\overline{p-s} \\ 4q^3-3fqq+2gq-h=\overline{q-m}\times\overline{q-p}\times\overline{q-s} \\ 4s^3-3fss+2gs-h=\overline{s-m}\times\overline{s-p}\times\overline{s-q}. \end{array}$$

hæ vero novissimæ conclusiones sic etiam alio modo erui poterunt, multiplicetur nimirum $m-p$ per $m-q$, itemque per $m-s$, tunc Productum erit

$$\begin{array}{l} m^3-pmm+pqm-pqs \\ -qmm+psm \\ -smm+qsm \end{array}$$

sed ex adnotatis ad Lemma II. est

$$\overline{-p-q-s}\times mm=\overline{m-f}\times mm= \quad m^3-fmm,$$

itemque $\overline{pq+ps+qs}\times m=mm-fm+g\times m=m^3-fmm+gm$

deinde $-pqs= \quad m^3-fmm+gm-h.$

&c.

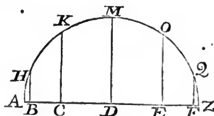
est

eſt igitur productum quæſitum $= m^3$

$$\begin{array}{l} + m^3 - fmm \\ + m^3 - fmm + gm \\ + m^3 - fmm + gm - h \\ \hline \text{Sive} \quad 4m^3 - 3fmm + 2gm - h \end{array}$$

quod erat inveniendum.

Vix tamen his Methodis ad concluſiones ſimpliciſſimas pervenietur, præterquam in Æquationibus quæ paucioribus terminis conſtant, niſi adhibeantur conſiderationes quædam aliæ, quod ut exemplo uno palam fiat,



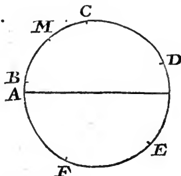
Dividatur Semicircumferentia AMZ, cujus Radius DA æqualis ſit unitati, in partes decem æquales, deinde ex impari quoque diviſionis termino demittantur ad diametrum perpendicula HB, KC, MD, OE, QF, quibus determinentur ſinus verſi ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, qui ordinatim nominentur m, p, q, s, t; quibus factis, requiratur ut aſſignetur productum $\overline{m-p} \times \overline{m-q} \times \overline{m-s} \times \overline{m-t}$. Jam cum notum ſit, ex Doctrina Sectionum Angularium, Æquationem eam qua definiuntur quantitates m, p, q, s, t, eſſe

$$x^5 - \frac{80}{16}x^4 + \frac{140}{16}z^3 - \frac{100}{16}xx + \frac{25}{16}x - \frac{1}{16} = 0$$

facile ex Regula ſupraſcripta id colligi poterit, productum quæſitum fore $5m^4 - 20m^3 + \frac{105}{4}mm - \frac{25}{2}m + \frac{25}{16}$, quæ quidem expreſſio eſt ſatis implicata, attamen id demonſtrari poteſt, productum quæſitum ad $\frac{5}{16\,BH}$ redactum iri.

AD PROBLEMA V. & VII.

Si sit Arcus $AM=A$, sumanturque alternatim ad unam & alteram partem puncti A arcus omnes, AB, AF, AC, AE, AD &c. ordinatim æquales arcubus $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$ &c. vel sumantur in eandem semper plagam Arcus omnes AB, AC, AD, AE, AF &c. ordinatim æquales Arcubus $\frac{A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, $\frac{4C+A}{n}$ &c. tum multiplicetur unusquisque horum arcuum per $n-1$, arcus omnes ex hac multiplicatione geniti, si principium ducant a Puncto M, ordinate terminabuntur ad unumquodque punctorum B, F, C, E, D, in primo casu, vel B, C, D, E, F, in secundo.



Suggessit amicus eruditissimus qui Theoremata nostra viderat posse expressionem fractionis $\frac{a-le}{1-ll}$ aliquanto simpliciorem reddi; etenim cum sint Cosinus Arcuum AM, BM, l, e sigillatim, si Sinus recti horum arcuum nominentur λ, ε; facile demonstrabitur fore Cosinum differentiæ, Cosinum scilicet Arcus $AB = le+\lambda\varepsilon$, est igitur $a=le+\lambda\varepsilon$, sive $a-le=\lambda\varepsilon$, adeoque $\frac{a-le}{1-ll}=\frac{\lambda\varepsilon}{\lambda\lambda}=\frac{\varepsilon}{\lambda}$, poterit igitur fractio $\frac{\frac{1}{n}+\frac{a-le}{n-lln}z}{1-2az+zz}$ in hanc converti $\frac{\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{n\lambda}z}{1-2az+zz}$ & sic de cæteris.

LIBER



L I B E R III.

C A P U T I.

De Fluente Quantitatis

$$\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1 \pm 2lz^{n} + z^{2n}}.$$

L E M M A I.

Fluens quantitatis $\frac{\dot{z}}{z}$ est logarithmus quantitatis z e Scala quadam logarithmica desumptus.

N hoc errore olim fui ut crederem expressionem $\frac{\dot{z}}{z}$ non posse tuto adhiberi ad designandam Fluxionem Logarithmi quantitatis z, etenim cum aliquandiu versatus essem in constructione logarithmorum ope Serierum infinitarum, qua speculatione tunc temporis maxime delectabar, cumque percepissem fluxionem $\frac{\dot{z}}{z}$ non usui fore ad eliciendas Series logarithmicas, hanc expressionem nimis præcipitanter judicaveram rejici oportere, atque in ejus locum $\frac{\dot{z}}{1+z}$, aut similem aliam semper substituere, donec ab eruditissimo Viro D. *Johanne Bernoulli*, benevole & amice literis admonitus fuerim me nisi, pro ut occasio id postularet, admitterem Expressionem $\frac{\dot{z}}{z}$ tanquam legitimam, sæpe amissurum elegantiam Solutionum; quapropter cum de hac re meditatus fuissem,

issem, veritatem comperi, & Viri Clarissimi consilium mihi maximo lucro apponendum censui.

LEMMA II.

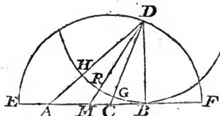
Fluens Quantitatis $\frac{ss\dot{z}}{ss+zz}$ *est Magnitudo Arcus circularis cujus Radius* s, *Tangens* z.

PROBLEMA I.

Invenire Fluentem quantitatis $\frac{\dot{z}}{1+2az+zz}$, *in qua* a *ponatur esse Unitate minor.*

SOLUTIO.

Pone $a+z=v$, hinc $\dot{z}=\dot{v}$, sed $aa+2az+zz=vv$, quapropter $1+2az+zz=1-aa+vv$; pone $1-aa=ss$, convertetur igitur Fluxio data in $\frac{\dot{v}}{ss+vv}$; sed ex Lemmate superiore, Fluens quantitatis $\frac{ss\dot{v}}{ss+vv}$ est Arcus circularis cujus Radius est 1, tangens vero z; est igitur ille Arcus divisus per ss, Fluens quantitatis $\frac{\dot{v}}{ss+vv}$, sive $\frac{\dot{z}}{1+2az+zz}$.



Centro C, Diametro $EF=2$, describatur Semicircumferentia EDF; e Centro C super Diametrum sumatur $CB=a$, tunc erecta ad Diametrum normali BD, quæ producatur donec occurrat Semicircumferentiæ in D, erit $BD=s$; deinde sumatur $CA=z$, ita ut fiat $AB=v$, præterea jungantur A & D, postremo e puncto D tanquam

quam Centro, Radio DB, deſcribatur circulus BGH ſecans DA in H: tunc erit Arcus BH Fluens quantitatis $\frac{ss\dot{v}}{ss+vv}$, erit igitur $\frac{1}{DBq}\times$Arc. BH Fluens quantitatis $\frac{\dot{v}}{ss+vv}$, ſeu $\frac{\dot{z}}{1+2az+zz}$.

COROLLARIUM.

Si quadranda ſit Curva cujus abſciſſa ſit $z = CA$, & ordinata $\frac{1}{1+2az+zz}$, erit $\frac{1}{DBq}\times$Arc.BH Area Curvæ contermina extremitati A abſciſſæ; eodem modo ſi ſumatur abſciſſa nova CM, jungaturque MD ſecans Arcum BH in R, erit $\frac{1}{DBq}\times$Arc.BR Area Curvæ contermina extremitati M abſciſſæ CM; erit igitur $\frac{1}{DBq}\times$Arc. RH Area Curvæ inſiſtens Baſi MA, & propter eandem rationem erit $\frac{1}{DBq}\times$Arc. GH Area inſiſtens Baſi CA.

PROBLEMA II.

Invenire Fluentem quantitatis $\frac{z\dot{z}}{1+2az+zz}$, *in qua* a *ponatur eſſe Unitate minor.*

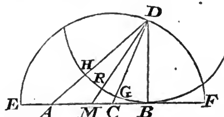
SOLUTIO.

Poſitis ut antea $1 - aa = ss$, & $a + z = v$, mutabitur Fluxio $\frac{z\dot{z}}{1+2az+zz}$ in hanc alteram $\frac{v\dot{v}-a\dot{v}}{ss+vv}$; ſed Fluxio quantitatis $\frac{v\dot{v}}{ss+vv}$, per Lemma I. eſt $\frac{1}{2}$ log. $\overline{ss+vv}$ ſive $\frac{1}{2}$ log.ADq, ſive log. AD; præterea Fluxio $\frac{a\dot{v}}{ss+vv}$, ex ſuperiori Problemate, eſt $\frac{CB}{DBq}\times$Arc. BH; eſt igitur log. $AD - \frac{CB}{DBq}\times$Arc.$BH$ Fluens quantitatis $\frac{v\dot{v}-a\dot{v}}{ss+vv}$ ſive $\frac{z\dot{z}}{1+2az+zz}$.

COROL-

COROLLARIUM.

Si quadranda ſit Area cujus abſciſſa z, & ordinata $\frac{z}{1 + 2az + zz}$, erit log. $AD - \frac{CB}{DBq} \times$ Arc.BH Area Curvæ contermina extremitati A abſciſſæ CA; eodem modo ſi ſumatur abſciſſa quædam alia CM, jungaturque MD ſecans Arcum BH in R, erit log.$MD - \frac{CB}{DBq} \times$Arc.$BR$ Area Curvæ contermina extremitati M abſciſſæ CM; eſt igitur log. $\frac{AD}{MD} - \frac{CB}{DBq} \times$Arc.$RH$ Area Curvæ inſiſtens Baſi MA, & ob eandem rationem erit log. $\frac{AD}{CD} - \frac{CD}{CBq} \times$Arc.$GH$ Area Curvæ inſiſtens Baſi CA.



PROBLEMA III.

Invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^2 \dot{z}}{1 + 2az + zz}$, *ubi ponatur eſſe* a *Unitate minor.*

SOLUTIO.

Dividatur Numerator per Denominatorem ordine inverſo; quo facto, invenietur $\frac{z^2 \dot{z}}{zz + 2az + 1} = \dot{z} - \frac{2az\dot{z}}{1 + 2az + zz} - \frac{\dot{z}}{1 + 2az + zz}$. ſit A Fluens quantitatis $\frac{\dot{z}}{1 + 2az + zz}$, quæ quidem inventa fuit in Problemate I; ſit etiam B Fluens quantitatis $\frac{\dot{z}z}{1 + 2az + zz}$, quæ

itidem

itidem inventa fuit in Problemate II; quibus positis, statim concludi poterit Fluentem quæsitam futuram fore $z - 2aB - A$; nominetur hæc Fluens C.

PROBLEMA IV.

Posità a *minore Unitate; invenire Fluentem quantitatis* $\frac{z^3\dot{z}}{1+2az+zz}$.

SOLUTIO.

Dividatur Numerator per Denominatorem ordine inverso, tunc invenietur Fluxio data $= z\dot{z} - \frac{2az^2\dot{z}}{1+2az+zz} - \frac{z\dot{z}}{1+2az+zz}$, unde perspicuum fiet Fluentem quæsitam esse $\frac{1}{2}zz - 2aC - B$, atque eodem modo procedere licet in infinitum.

COROLLARIUM I.

Itaque si fuerit a minor Unitate, & θ numerus quilibet integer & affirmativus, Fluens quantitatis $\frac{z^\theta \dot{z}}{1+2az+zz}$ methodo superius exposita obtineri poterit.

COROLLARIUM II.

Si sit a minor Unitate, θ vero sit numerus quilibet fractus & affirmativus, poterit etiamnum inveniri Fluens quantitatis $\frac{z^\theta \dot{z}}{1+2az+zz}$. Etenim sit $\theta = \frac{\delta}{\lambda}$, ubi fractio $\frac{\delta}{\lambda}$ ponitur redigi ad terminos simplicissimos ideoque integros; erit igitur Fluxio proposita $= \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}} \dot{z}}{1+2az+zz}$; pone $z^{\frac{1}{\lambda}} = v$, est igitur $z = v^\lambda$, & $z^{\frac{\delta}{\lambda}} = v^\delta$, hinc $\dot{z} = \lambda v^{\lambda-1}\dot{v}$, & $z^{\frac{\delta}{\lambda}}\dot{z} = \lambda v^{\delta+\lambda-1}\dot{v}$, est igitur Fluxio proposita æqualis

lis Fluxioni $\frac{\lambda v^{\text{ſ}+\lambda-1}\dot{v}}{1+2av^{\lambda}+v^{2\lambda}}$, ſed Fractio $\frac{1}{1+2av^{\lambda}+v^{2\lambda}}$ poteſt dividi in componentes hujus formæ $\frac{m+pv}{1+2bv+vv}$; quibus in ſingulis determinantur quantitates ipſis m, p, b analogæ, quemadmodum id oſtenſum fuit in Prob. V. Lib. I. poterit igitur Fluxio propoſita redigi in componentes hujus formæ $\frac{\lambda mv^{\text{ſ}+\lambda-1}\dot{v}+\lambda pv^{\text{ſ}+\lambda}\dot{v}}{1+2bv+vv}$ quæ tales ſint ut Index poteſtatis indeterminatæ v in Numeratore ſit integer, & præterea ſit b minor Unitate; poterit igitur Fluens quantitatis propoſitæ inveniri.

PROBLEMA V.

Poſitâ a *minore Unitate, invenire Fluentem quantitatis* $\frac{z^{-1}\dot{z}}{1+2az+zz}$, *ſeu* $\frac{\dot{z}}{z+2azz+z^3}$.

SOLUTIO.

Dividatur Numerator per Denominatorem ordine naturali, tunc invenietur Fluxio propoſita $=\frac{\dot{z}}{z}-\frac{2a\dot{z}}{1+2az+zz}-\frac{z\dot{z}}{1+2az+zz}$, ſed Fluens $1^{\text{æ}}$ partis eſt log. AC, per Lemma I.; Fluens $2^{\text{æ}}$ partis eſt $-\frac{2CB}{DBq}\times$Arc. BH, quod liquet ex I. Problemate; poſtremo Fluens $3^{\text{æ}}$ partis eſt $-$log. $AD+\frac{CB}{DBq}\times$Arc.BH, quod liquet ex II. Problemate, quapropter Fluens quantitatis $\frac{\dot{z}}{z+2azz+z^3}$ invenietur eſſe $=$ log. $\frac{AC}{AD}-\frac{CB}{DBq}\times$Arc.$BH$.

C O-

COROLLARIUM.

Si quadranda fit Area cujus alciffa z, $= CA$, ordinata vero $\frac{1}{z + 2azz + z^3}$, erit, ex ante demonftratis, Area contermina extremitati A abfciffæ $= \log. \frac{AC}{AD} - \frac{CB}{DBq} \times$Arc. BH; eodem modo fi fumatur abfciffa quædam alia CM, jungaturque DM fecans arcum BH in R, erit Area contermina extremitati M novæ hujus abfciffæ $= \log. \frac{MC}{MD} - \frac{CB}{DBq} \times$Arc. BR, eft igitur $\log. \frac{AC \times MD}{MC \times AD} - \frac{CB}{DBq} \times$Arc. RH Area Curvæ infiftens Bafi MA; unde perfpicuum eft Aream infiftentem Bafi CA effe infinitam.

PROBLEMA VI.

Pofitâ a minore Unitate, invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{-2}\dot{z}}{1 + 2az + zz}$, *feu* $\frac{\dot{z}}{zz + 2az^3 + z^4}$.

SOLUTIO.

Dividatur Numerator per Denominatorem ordine naturali, tum invenietur Quotus, $\frac{\dot{z}}{zz} - \frac{2az^{-1}\dot{z}}{1 + 2az + zz} - \frac{\dot{z}}{1 + 2az + zz}$; fit A Fluens quantitatis $\frac{\dot{z}}{1 + 2az + zz}$, itemque $\acute{B}$ Fluens quantitatis $\frac{z^{-1}\dot{z}}{1 + 2az + zz}$, quæ quidem Fluentes ambæ fuerunt antea repertæ, hinc palam fit Fluentem quæfitam effe $= -\frac{1}{z} - 2a\acute{B} - A$. nominetur hæc Fluens $\acute{C}$.

 PRO-

PROBLEMA VII.

Positâ a minore Unitate, invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{-3}\dot{z}}{1+2az+zz}$.

SOLUTIO.

Diviso Numeratore per Denominatorem ordine naturali, prodibit Quotus, $z^{-3}\dot{z} - \frac{2az^{-2}\dot{z}}{1+2az+zz} - \frac{z^{-1}\dot{z}}{1+2az+zz}$, ideoque Fluens quæsita erit $= -\frac{1}{2zz} - 2a\acute{C} - \acute{B}$; idemque est processus in infinitum.

COROLLARIUM I.

Quapropter si sit a minor Unitate, & θ numerus quilibet integer, Fluens quantitatis $\frac{z^{-\theta}\dot{z}}{1+2az+zz}$, methodo superius exposita obtineri poterit.

Istud autem sic alio modo demonstrari potest, pone $z = \frac{1}{v}$, tunc convertetur data Fluxio $\frac{z^{-\theta}\dot{z}}{1+2az+zz}$, in aliam sibi æqualem $-\frac{v^{\theta}\dot{v}}{1+2av+vv}$, cujus Fluens ex Corollario I. Problematis quarti obtinebitur.

COROLLARIUM II.

Et simili processu quo usi fuimus in Corollario II. Problematis quarti, hoc concludi poterit, quod si sit a minor Unitate, & θ numerus quilibet negativus & fractus, poterit obtineri Fluens quantitatis $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1+2az+zz}$.

COROL-

COROLLARIUM III.

Igitur ex antedictis perspicuum est Fluentem quantitatis $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1+2az+zz}$, ubi ponatur esse a minor Unitate, semper obtineri posse, sive fuerit θ numerus affirmativus aut negativus, integer aut fractus.

PROBLEMA VIII.

Posità a majore Unitate, invenire Fluentem quantitatis $\frac{\dot{z}}{1+2az+zz}$.

SOLUTIO.

Posito Denominatore $1+2az+zz=0$, sint m & p Radices hujus Æquationis; tunc ex Corollario I. Theorematis VI. Lib. II. id patebit, Fluxionem propositam resolvi posse in componentes duas $\frac{m\dot{z}}{\overline{m-p}\times\overline{1-mz}}+\frac{p\dot{z}}{\overline{p-m}\times\overline{1-pz}}$, sive $\frac{1}{m-p}\times\frac{m\dot{z}}{1-mz}-\frac{p\dot{z}}{1-pz}$, sed ex Lemmate I. hujus libri, Fluens quantitatis $\frac{m\dot{z}}{1-mz}$ est log. $\frac{1}{1-mz}$, & Fluens quantitatis $\frac{p\dot{z}}{1-pz}$ est log. $\frac{1}{1-pz}$, adeoque est $\frac{1}{m-p}\times$ log. $\frac{1-pz}{1-mz}$ Fluens quantitatis propositæ.

COROLLARIUM.

Si ponatur $\sqrt{aa-1}=s$, tunc erit $m=s-a$, $p=-s-a$, adeoque poterit Fluens quæsita exprimi per $\frac{1}{2s}$ log. $\frac{1+sz+az}{1-sz+az}$.

PROBLEMA IX.

Posito θ numero integro, invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1+mz}$.

SOLUTIO.

Fluens quæsita commode exprimi poterit per Seriem infra positam, nimirum

$$\frac{z^{\theta}}{\theta m}$$

$$\frac{z^{\theta}}{\theta m} - \frac{z^{\theta-1}}{\overline{\theta-1}\times mm} + \frac{z^{\theta-2}}{\overline{\theta-2}\times m^3} - \frac{z^{\theta-3}}{\overline{\theta-3}\times m^4} \ \&c. \ \pm \frac{1}{m^{\theta+1}} \log. \overline{1+mz},$$

quæ ad tot terminos ante ultimum logarithmicum continuatur, quot ſunt Unitates in numero θ.

PROBLEMA X.

Poſito θ numero integro, invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{-\theta}\dot{z}}{1+mz}$.

SOLUTIO.

Fluens quæſita exprimitur per Seriem

$$-\frac{1}{\overline{\theta-1}\times z^{\theta-1}} + \frac{m}{\overline{\theta-2}\times z^{\theta-2}} - \frac{mm}{\overline{\theta-3}\times z^{\theta-3}} \ \&c. \ \pm m^{\theta-1}\times\log. \frac{1+mz}{z},$$

quæ ad tot terminos, ante ultimum logarithmicum, continuatur quot ſunt Unitates in $\theta-1$.

PROBLEMA XI.

Invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}\dot{z}}{1+mz}$.

SOLUTIO.

Pone $z^{\frac{1}{\lambda}}=v$, & $\lambda+\delta-1=\theta$, tunc convertetur Fluxio data in hanc alteram ſibi æqualem $\frac{\lambda v^{\theta}\dot{v}}{1+mv^{\lambda}}$, pone iterum $m^{\frac{1}{\lambda}}v=y$, & reducetur Fluxio data ad $\frac{\lambda}{\sqrt[\lambda]{m^{\theta+1}}}\times\frac{y^{\theta}\dot{y}}{1+y^{\lambda}}$: quæ concluſio aliquanto citius obtinebitur, ponendo $\overline{mz}|^{\frac{1}{\lambda}}=y$; eodem modo, poſitis $\overline{mz}|^{\frac{1}{\lambda}}=y$, & $\lambda+\delta-1=\theta$, reducetur Fluxio quantitatis $\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}\dot{z}}{1-mz}$ ad $\frac{\lambda}{\sqrt[\lambda]{m^{\theta+1}}}\times$ $\frac{y^{\theta}\dot{y}}{1-y^{\lambda}}$.

Jam

Jam vero poteſt Fluxio $\frac{y^{\theta}\dot{y}}{1 \pm y^{\lambda}}$ vel omnino reſolvi in componentes trinomiales hujus formæ $\frac{py^{\theta}\dot{y} + py^{\theta+1}\dot{y}}{1 + 2ay + yy}$, quibus in ſingulis, eſt quantitas a, ut & quantitas quælibet alia ipſi analoga, minor Unitate; vel in componentes quarum una vel ad plurimum duæ erunt binomiales hujus formæ $\frac{py^{\theta}\dot{y}}{1 \pm y}$, reliquæ vero trinomiales ejuſdem generis ac ſupra, quemadmodum id demonſtratum fuit in Libro I; porro in omnibus hiſce caſibus Fluentes inveniri poſſunt, adeoque Fluens quantitatis datæ invenietur.

PROBLEMA XII.

Invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1 + 2lz^{n} + z^{2n}}$, *ubi ſit* l *minor Unitate.*

SOLUTIO.

Quandoquidem poteſt Ordinata $\frac{1}{1 + 2lz^{n} + z^{2n}}$ omnino reſolvi in componentes trinomiales quadraticas, patet ex antedictis poſſe Fluxionem datam ad Fluentem ſuam adduci qualiſcunque fuerit Index θ, affirmativus aut negativus, integer aut fractus.

Si Fluxio data ſit $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1 + 2lz^{-n} + z^{-2n}}$, multiplicentur tum Numerator tum Denominator per z^{2n}, & convertetur Fluxio data in $\frac{z^{\theta+2n}\dot{z}}{1 + 2lz^{n} + z^{2n}}$, cujus Fluens invenietur.

PROBLEMA XIII.

Invenire Fluentem Quantitatis $\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}\dot{z}}{1 + 2lz^{\frac{n}{\pi}} + z^{\frac{2n}{\pi}}}$, *poſitâ* l *minore Unitate.*

S O-

SOLUTIO.

Pone $z^{\frac{1}{\lambda\pi}} = x$, tunc convertetur Fluxio data in aliam ſibi æqualem $\frac{\lambda\pi x^{\delta\pi \mp \lambda\pi - 1}\dot{x}}{1 \mp 2lx^{n\lambda} \mp x^{2n\lambda}}$, cujus Fluens ex prius dictis inveniri poterit.

PROBLEMA XIV.

Invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1 \pm z^{n}}$.

SOLUTIO.

Poteſt Ordinata $\frac{1}{1 \pm z^{n}}$ dividi in componentes, vel omnes trinomiales hujus formæ $\frac{m \mp mz}{1 - 2az \mp zz}$, in quarum unaquaque, erit quantitas a, ut & quantitas quælibet alia ipſi analoga, minor Unitate; vel in componentes partim trinomiales ejuſdem formæ, partim binomiales hujus formæ $\frac{m}{1 \pm z}$, quarum omnium ope, Fluens quæſita invenietur.

PROBLEMA XV.

Poſitâ l *majore Unitate, invenire Fluentem quantitatis* $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1 \mp 2lz^{n} \mp z^{2n}}$.

SOLUTIO.

Poteſt Fluxio data in binas alteras binomiales dividi, quarum ſubſidio Fluens quæſita invenietur.

Illud obſervandum eſt de Fluxione $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1 \mp z^{n}}$, eam converti poſſe in aliam ſibi æqualem, ſed ſimpliciorem: ſi ita acciderit ut Fractio $\frac{\theta \mp 1}{n}$ ad terminos minores $\frac{\delta}{\lambda}$ poſſit redigi; etenim poſito $z^{n} = v^{\lambda}$, convertetur Fluxio data in hanc ſibi æqualem ſed ſimpliciorem, nimirum

rum $\frac{\frac{\lambda}{n}\, v^{\delta-1}\dot{v}}{1+v^{\lambda}}$, idemque dicendum de Fluxione $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1+2lz^{n}+z^{2n}}$.

Quæ autem dicta sunt de Fluentibus quantitatum $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1+z^{n}}$. $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1+2lz^{n}+z^{2n}}$, ea facile accommodari poterunt Fluentibus quantitatum $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{e+fz^{n}}$, $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{e+fz^{n}+gz^{2n}}$.

PROBLEMA XVI.

Invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1\pm 2lz^{n}+z^{2n}}$, *ubi ponatur* l *minor Unitate sive* $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{\overline{1\pm z^{n}}|^{2}}$.

SOLUTIO.

Sit *P* Fluens quantitatis $\frac{z^{\theta}\dot{z}}{1\pm z^{n}}$, quam inveniri posse ante ostendimus; tunc erit Fluens quæsita $= \frac{\frac{1}{n}z^{\theta+1}}{1\pm z^{n}} + \frac{n-\theta-1}{n}\times P$.



CAPUT

CAPUT II.

LEMMA I.

Si detur Fractio quælibet cujus Denominator utcunque conſtetur ex Binomiis, Trinomiis, Quadrinomiis &c. ad poteſtates quaſlibet datas, ſed integras evectis, Numerator vero ſit Unitas; fractio prædicta in totidem fractiones reſolvi poterit quot ſunt Binomia, Trinomia aut Quadrinomia in ejus Denominatore, quarum Fractionum Denominatores, ſinguli ſingulis reſpondentes, erunt ipſæ poteſtates e quibus conſtituitur Denominator Fractionis propoſitæ.

Quanquam vero hoc ſatis pateat ex iis quæ ante dicta fuerunt de Ordinatis rationalibus in ſimpliciores reſolvendis, attamen, ne quis ſit dubitationi locus, lubet mentem noſtram fuſius explicare, cui præſtando nihil magis proderit quam Exemplorum appoſitio.

Sit igitur Fractio $\frac{1}{\overline{1-mx}\times\overline{1-pz}|}$, quam reſolvi oporteat in componentes ſimpliciores.

Finge fractionem datam eſſe $\frac{1}{\overline{1-mx}\times\overline{1-px}\times\overline{1-qx}}$, poſita ſcilicet $q=p$. jam cum in II. Libro id demonſtratum fuerit, fractionem illam reſolvi poſſe in ſimpliciores $\frac{mm}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{1-mx}} + \frac{pp}{\overline{p-m}\times\overline{p-q}\times\overline{1-px}}$ $+\frac{qq}{\overline{q-m}\times\overline{q-p}\times\overline{1-qx}}$, illud ſtatim percipitur, fractionem primam evadere $\frac{mm}{\overline{m-p}|^2\times\overline{1-mx}}$, at vero fractiones binæ reliquæ, ſigillatim ſumptæ, propter factores nihilo æquales $p-q$ & $q-p$ in utroque denominatore poſitos, ſunt infinite magnæ; attamen earum ſumma quæ quidem in differentiam vertitur ob ſigna contraria quantitatum $p-q$ & $q-p$, finita evadit; quocirca ſi fractiones illæ in unum addantur,

dantur, earum summa divisis Numeratore & Denominatore per $p-q$, prodibit $\frac{pq-mp-mq-mpqx}{\overline{p-m}\times\overline{q-m}\times\overline{1-px}\times\overline{1-qx}}$, seu $\frac{pp-2mp+mppx}{\overline{m-p}|^2\times\overline{1-px}|^2}$.

Eodem modo, si id requiratur ut Fractio $\frac{1}{\overline{1-mx}\times\overline{1-px}|^3}$ in suas componentes simpliciores resolvatur, finge eam esse

$\frac{1}{\overline{1-mx}\times\overline{1-px}\times\overline{1-qx}\times\overline{1-sx}}$, positis scilicet $q=s=p$, tum ex iis quæ ante dicta fuerint, fractiones componentes reperientur

$1^a=\frac{m^3}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}\times\overline{1-mx}}$, $2^a=\frac{p^3}{\overline{p-m}\times\overline{p-q}\times\overline{p-s}\times\overline{1-px}}$, $3^a=\frac{q^3}{\overline{q-m}\times\overline{q-p}\times\overline{q-s}\times\overline{1-qx}}$, $4^a=\frac{s^3}{\overline{s-m}\times\overline{s-p}\times\overline{s-q}\times\overline{1-sx}}$, quarum si tertia secundæ jungatur, Numerator & Denominator summæ poterunt sigillatim dividi per $p-q$; qua divisione facta, si huic deinceps summæ addatur tertia fractio, tunc Numerator & Denominator hujus novæ summæ poterit sigillatim dividi per $\overline{p-s}\times\overline{q-s}$, adeoque summa ternarum erit $\frac{-3mmp+3mpp-p^3+\overline{3mpp-p^3}\times x-m^3p^3xx}{\overline{m-p}|^3\times\overline{1-px}|^3}$,

prima vero, solo conspectu, statim redigitur ad $\frac{m^3}{\overline{m-p}|^3\times\overline{1-mx}}$, atque eodem modo pergere licet ad casus altiores & quantumvis compositos.

Quinetiam si Fractiones simplices in quas proposita resolvi fingitur contineant quantitates imaginarias, tunc quicquid est imaginarii semper destruetur per additionem binarum quarumque fractionum simplicium easdem imaginarias involventium, de quo Exempla quædam allata sunt, & plura fortasse afferentur.

Cum igitur neque æqualitas factorum, neque quantitates imaginariæ quibus factores affici possunt, impediant quominus fractiones simplices toties ad se invicem addantur, quoties sit necesse ad id efficiendum ut earum Denominator communis adæquet aliquem e factoribus fractionis propositæ, palam est constare veritatem propositionis nostræ.

Hæc confirmari poterunt methodo Comparationum ad hunc modum.

Sumatur, exempli gratia, fractio $\frac{1}{\overline{1-mx}\times\overline{1-px}|^2}$, quam hac Methodo in fimpliciores refolvi oporteat, pone fractiones in quas propofita refolvitur, effe $\frac{A}{1-mx}+\frac{B+Cx}{\overline{1-px}|^2}$, tum inftitutâ Æquatione inter fractionem propofitam & fractiones affumptas, erit $\frac{1}{\overline{1-mx}\times\overline{1-px}|^2}=\frac{A}{1-mx}+\frac{B+Cx}{\overline{1-px}|^2}$, unde orietur $A\times\overline{1-px}|^2+B+Cx=1$ five

$$\begin{array}{l} A-2Apx+Appxx \\ +B-Bmx \qquad\qquad = 1 \\ \quad +Cx-mCxx \end{array}$$

pone $A+B=1$, $-2Ap-mB+C=0$. $App-mC=0$, quo facto reperies $A=\frac{mm}{\overline{m-p}|^2}$, $B=\frac{pp-2pm}{\overline{m-p}|^2}$, $C=\frac{mpp}{\overline{m-p}|^2}$, adeoque fractiones fimplices eædem erunt quæ ante repertæ fuerant.

Hac data occafione, non alienum erit oftendere quæ debeat fumi multitudo terminorum in Numeratore fractionis cujuflibet fimplicis ex earum numero in quas propofita eft refolvenda, quibufque indicibus termini Numeratoris fint afficiendi,

Sit igitur n maxima communis menfura indicum omnium quos propofita complectitur, p index maximus Denominatoris fractionis cujuflibet fimplicis, λ index poteftatis ad quam Denominator ille attollitur, tunc multitudo terminorum qui fumi debeant erit $\frac{p\lambda}{n}$, factâ differentiâ indicum n, conftitutoque indice primi termini $=0$, fed ut ad rem revertamur.

Cum in ejufmodi Comparationibus, Coefficientes affumptæ omnino determinentur per Æquationes fimplices, nihil eft periculi ne in abfurditates imaginariarum quantitatum poffis incidere; attamen aliud genus repugnantiæ oriri poterit nifi caute procedas, nimirum fi acciderit ut aliqua ex Coefficientibus inveniatur æqualis tum numero uno, tum altero; quod fi ita eveniat, indicio eft aliquid indeterminati latere in affumptionibus, feu aliquid involvi in una ex Æquationibus quæ jam involvebatur in aliqua ex cæteris; quod in-

com-

commodum ut vitetur, communes divisores omnes factorum sedulo sunt examinandi & seponendi, ut ex iis potestates Binomiorum, Trinomiorum *&c.* formentur; quo observato, incongruitates omnes effugientur; atque adeo confirmatur veritas Propositionis nostræ.

Ex iis quæ diximus, quæ quidem paucis verbis hanc Comparationum methodum complectuntur, facile erit Canones seu Theoremata construere quibus casus particulares uno quasi intuitu solvantur, cujus generis est Canon infra subjectus, quo fractio apposita $\frac{1}{\overline{1-mx}\times\overline{1-px}|^{\lambda}}$ in binas alteras dividetur hujus sequentis formæ $\frac{A}{1-mx}+\frac{B+Cx+Dxx+Ex^3\ \&c.}{\overline{1-px}|^{\lambda}}$ etenim reperietur esse $A=$

$$\frac{m^{\lambda}}{\overline{m-p}|^{\lambda}},\ B=\frac{\overline{m-p}|^{\lambda}-m^{\lambda}}{\overline{m-p}|^{\lambda}},\ C=\frac{Bm+\lambda m^{\lambda}p}{\overline{m-p}|^{\lambda}},\ D=\frac{Cm+\frac{\lambda}{1}\times\frac{\lambda-1}{2}m^{\lambda}pp}{\overline{m-p}|^{\lambda}},$$

$$E=\frac{Dm+\frac{\lambda}{1}\times\frac{\lambda-1}{2}\times\frac{\lambda-2}{3}m^{\lambda}p^3}{\overline{m-p}|^{\lambda}}\ \&c.$$

LEMMA II.

Posito λ *numero integro, Quadratura Curvæ cujus Ordinata est* $\frac{z^{\theta-1}}{\overline{e+fz^n}|^{\lambda+1}}$, *vel obtinetur accurate, vel pendet a Quadratura Conicarum Sectionum.*

Etenim ex iis quæ tradita fuerunt a Cl. Viris *Newtono* & *Cotesio*, si sit A Area Curvæ datæ, F Area Curvæ cujus Ordinata sit $\frac{z^{\theta-1}}{\overline{e+fz^n}|^{\lambda}}$, tunc ponendo $e+fz^n=R$, reperietur esse $A=$

$\frac{\overline{\theta-\lambda n}\times F-z^{\theta}R^{-\lambda}}{\lambda ne}$, adeoque si fuerit $\theta=\lambda n$, Curva data quadrabitur accurate; sin minus, ejus Area pendebit ab Area Curvæ cujus Ordinata sit $\frac{z^{\theta-1}}{\overline{e+fz^n}|^{\lambda-1}}$, quæ Area si nominetur G, erit

$F=\frac{\overline{\theta-\overline{\lambda-1}\times n}G-z^{\theta}R^{-\overline{\lambda-1}}}{\overline{\lambda-1}\times ne}$, adeoque si sit $\theta=\overline{\lambda-1}\times n$, Curva F accurate quadrabitur, quo efficietur ut Area A quæ pendet ab Area F itidem quadrari possit accurate; sin minus id contigerit, Area F pendebit ab Area G, hæc vero pendebit a nova Area cujus Ordinata erit $\frac{z^{\theta-1}}{\overline{e+fz^n}|^{\lambda-2}}$, & sic deinceps; ergo si fuerit index λ numerus integer, index ille decrescet donec ad Unitatem pervenerit; Quadratura igitur Curvæ cujus Ordinata est $\frac{z^{\theta-1}}{\overline{e+fz^n}|^{\lambda+1}}$ vel obtinetur accurate, vel pendet ab Area Curvæ cujus Ordinata est $\frac{z^{\theta-1}}{e+fz^n}$, quæ ipsa pendet a Circulo aut Hyperbola aut ab utraque.

LEMMA III.

Posito λ numero integro, Quadratura Curvæ cujus Ordinata est $\frac{z^{\theta-1}}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}|^{\lambda+1}}$, vel obtinetur accurate, vel pendet a Quadratura Conicarum sectionum.

Quo vero ad hanc assertionem probandam pateat aditus, pauca quædam ex *Newtono* & *Cotesio* describere mihi visum est: Sit igitur $\frac{z^{\theta}}{R^{\lambda}}$ Area Curvæ; jam si sumatur Fluxio hujus Areæ, ea reperietur esse $\overline{\theta\dot{z}R-\lambda\dot{R}z}\,\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$, pone jam R esse $e+fz^n+gz^{2n}$, inde

$R=$

$\dot{R}=nfz^{n-1}\dot{z}+2ngz^{2n-1}\dot{z}$, quo valore substituto in locum $\dot{R}$, & scripta 1 pro $\dot{z}$, Ordinata Curvæ prædictæ erit $\frac{\theta e z^{\theta-1}+\overline{\theta-\lambda n}\times f z^{\theta+n-1}+\overline{\theta-2\lambda n}\times g z^{\theta+2n-1}}{R^{\lambda+1}}$, porrò si Ordinata ex variis partibus constat, partes singulæ pro Ordinatis Curvarum totidem habendæ sunt; quo constituto, sequitur ut si sit A Area Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$, B Area Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda+1}}$, C Area Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta+2n-1}}{R^{\lambda+1}}$, tunc erit

$\theta e A+\overline{\theta-\lambda n}\times f B+\overline{\theta-2\lambda n}\times g C=z^{\theta}R^{\lambda}$, & propter eandem rationem, si sit D Area Curvæ cujus Ordinata sit $\frac{z^{\theta+3n-1}}{R^{\lambda}}$, erit

$\theta e B+\overline{\theta-\lambda n}\times f C+\overline{\theta-2\lambda n}\times g D=\frac{z^{\theta+n}}{R^{\lambda}}$. Sit nunc F Area Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$, itemque sit G Area Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$, tunc propter

$e+fz^{n}+gz^{2n}=R$, si omnia ducantur in $\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$, erit

$$\frac{e z^{\theta-1}+f z^{\theta+n-1}+g z^{\theta+2n-1}}{R^{\lambda+1}}=\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda}},$$ tum etiam

$$\frac{e z^{\theta+n-1}+f z^{\theta+2n-1}+g z^{\theta+3n-1}}{R^{\lambda+1}}=\frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}.$$

adeoque erit $eA+fB+gC=F$, itemque

$eB+fC+gD=G$.

Habemus igitur quatuor Æquationes quibus sex Arearum A, B, C, D, F, G, relationes possint determinari, quamobrem si ex his quatuor Æquationibus, quantitates quælibet ternæ expellantur, manebit Æquatio qua relatio inter ternas reliquas exprimetur, adeoque expulsis B, C, D, reperietur

$A=$

$$A = \frac{\overline{\overline{\theta + \lambda n} \times ff + \overline{2\theta - 4\lambda n} \times eg} \times F + \overline{\theta - n + 2\lambda n} \times fgG - \overline{ff - 2eg} \times z^{\theta} R^{-\lambda} - fg \times z^{\theta+n} R^{-\lambda}}{n\lambda e \times \overline{4eg - ff}},$$

quibus poſitis; perſpicuum eſt Quadraturam accurate exhibitum iri, ſi ita acciderit ut $\overline{\theta + \lambda n} \times ff$ ſit $= \overline{4\lambda n - 2\theta} \times eg$, eodemque tempore $n - 2\lambda n = \theta$; ſin vero neutrum, vel alterum duntaxat acciderit, tunc Quadratura Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$ pendebit a quadratura binarum Curvarum quarum Ordinatæ ſint $\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$ & $\frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$, vel ab earum altera; jam Ordinata Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$, pendet a binis Areis quarum Ordinatæ ſint $\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda-1}}$ & $\frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda-1}}$, quadratura vero Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$ pendet a binis Areis quarum Ordinatæ ſint $\frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda-1}}$ & $\frac{z^{\theta+2n-1}}{R^{\lambda-1}}$; ergo Curvæ ternæ exortæ ſunt, niſi fortaſſe earum aliquæ exciderint Coefficientium limitatione, e quarum Areis, Area Curvæ propoſitæ pendet: jam ſi earum unaquæque ſit Quadraturæ capax, Curva propoſita quadrabitur accurate, ſin acciderit ut earum nulla vel earum una aut altera tantum poſſit quadrari, unaquæque earum quæ reſtant ad quadrandum pendebit a quadratura Curvarum binarum in quarum utraque, Ordinata afficietur Denominatore $R^{\lambda-2}$, ergo perpetua Diminutione indicum, tandem pervenietur ad Unitatem, ad quam cum perventum erit, Curvæ illæ, e quarum Areis, Area Curvæ propoſitæ pendet, ipſæ comperientur ab Areis Conicarum ſectionum pendere.

Ne vero quis putet hanc Demonſtrationem poſſe convelli, ex eo quod poſſit accidere ut quantitatis $4eg - ff$ ſit nihilo Æqualis, quo fiet ut Area A ex Æquatione ejiciatur; id ſatis erit animadverti Curvam cujus Ordinata eſt $\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$ ſeu $\frac{z^{\theta-1}}{\overline{e + fz^{n} + gz^{2n}}|^{\lambda+1}}$, hoc in caſu ad

Bino-

Binomium referri, etenim hæc ordinata æquipollet huic alteræ $\frac{\overline{4e}|^{\lambda+1} z^{\theta-1}}{\overline{2e-+fz^n}|^{2\lambda+1}}$, quæ ideo pendebit a quadratura Curvæ cujus Ordinata erit $\frac{z^{\theta-1}}{2e-+fz^n}$.

COROLLARIUM.

Si detur Fractio cujus Denominator sit Unitas, vel poteſtas qualiſcunque integra aut fracta indeterminatæ z, Denominator vero ſit Multinomium rationale compoſitum ex datis & indeterminata z, poſſitque Multinominum illud reſolvi in Binomia aut Trinomia aut utrumque, vel in eorum poteſtates; Curva cujus Abſciſſa eſt z Ordinata vero fractio prædicta, vel accurate quadrabitur vel habebit Quadraturam pendentem a Sectionibus conicis.

CAPUT III.

De Ordinatis quibuſdam irrationalibus ad Rationalitatem redigendis.

QUanquam non erat mei inſtituti quidquam dicere de Curvis irrationalibus quæ adeo fuſe & erudite tractatæ fuerunt a Cl. Viris *Newtono* & *Coteſio*, attamen cum perpenderem Binomia quædam & Trinomia Radicalitate ſua exui poſſe, eaque idcircò cum Curvis rationalibus habere affinitatem, non præterire potui quin pauca quædam de hoc argumento attingerem, quamvis ſi attente conſideretur Methodus a *Coteſio* ad hanc rem adhibita, artificium quo id conficitur non poterit diu latere.

Sit igitur $z^{\theta} \times \overline{e-+fz^n}|^{\lambda}$ Ordinatata irrationalis, poſito nimirum λ numero fracto; fac eſſe $e-+fz^n = v$, hinc erit $fz^n = v-e$. adeoque ſumptis Fluxionibus, erit $nfz^{n-1}\dot{z} = \dot{v}$, quæ Æquatio ſi per proximam ſuperiorem dividatur, erit $\frac{\dot{z}}{z} = \frac{\frac{1}{n}\dot{v}}{v-e}$, ſed ex quod ſit

$fz^n =$

$fz^n = v - e$, erit $z^{\theta+1} = \dfrac{\overline{v-e}|^{\frac{\theta+1}{n}}}{f^{\frac{\theta+1}{n}}}$, quibus ductis in $\dfrac{\dot{z}}{z}$, erit

$z^{\theta}\dot{z} = \dfrac{\frac{1}{n}\dot{v} \times \overline{v-e}|^{\frac{\theta-n+1}{n}}}{f^{\frac{\theta+1}{n}}}$ quapropter Fluxio invenietur $z^{\theta}\dot{z} \times \overline{e+fz^n}|^{\lambda}$

$= \dfrac{\frac{1}{n} v^{\lambda}\dot{v} \times \overline{v-e}|^{\frac{\theta-n+1}{n}}}{f^{\frac{\theta+1}{n}}}$; ergo nihil magis requiritur ad irrationalitatem tollendam, quam ut $\frac{\theta-n+1}{n}$ sit quantitas integra; sed $\frac{-n}{n} = -1$, pone igitur $\frac{\theta+1}{n} = r$, qui si fuerit numerus integer, irrationalitas tolletur, & erit Area Curvæ cujus Ordinata $z^{\theta} \times \overline{e+fz^n}|^{\lambda}$ æqualis Areæ Curvæ cujus Ordinata $\dfrac{\frac{1}{n} v^{\lambda} \times \overline{v-e}|^{r-1}}{f^{r}}$.

NB. Irrationalitas tolli dicitur, si cum affecerit terminos duos aut plures inter se conjunctos signis + aut —, vel omnino evanescat vel ad terminum unicum transferatur.

Si igitur Quantitas z^{θ} extra vinculum posita, ad hanc formam redigi possit, nimirum $rn-1$, posito r numero integro, tunc Ordinata Radicalitate sua liberabitur ponendo $e+fz^n = v$, vel etiam $\overline{e+fz^n}|^{\lambda} = v$; vel si sit $\lambda = \frac{p}{q}$, ponendo $\overline{e+fz^n}|^{\frac{1}{q}}$ seu $\sqrt[q]{e+fz^n} = v$, quæ novissima positio constanter a *Cotesio* usurpatur.

Cum vero, sive posueris $e+fz^n = v$, sive $\dfrac{e+fz^n}{z^n} = v$, possis in utroque casu valorem rationalem quantitatis z^n elicere, pone nunc $\dfrac{e+fz^n}{z^n} = v$, quo posito, erit $z^n = \dfrac{e}{v-f}$, adeoque $\dfrac{\dot{z}}{z} = \dfrac{-\frac{1}{n}\dot{v}}{v-f}$,

$z^{\theta+1} = \dfrac{e^{\frac{\theta+1}{n}}}{\overline{v-f}|^{\frac{\theta+1}{n}}}$, $\overline{e+fz^n}|^{\lambda} = \dfrac{e^{\lambda}v^{\lambda}}{\overline{v-f}|^{\lambda}}$. Ex quibus fit ut Area

Curvæ

Curvæ cujus Ordinata $z^{\theta}\times\overline{e+fz^{n}}|^{\lambda}$ poſſit iterum converti in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata ſit $\dfrac{-\frac{1}{n}\times e^{\frac{\theta+1+n\lambda}{n}}\,v^{\lambda}}{\overline{v-f}|^{\frac{\theta+n+1+n\lambda}{n}}}$, ergo ſi fuerit $\frac{\theta+1+n\lambda}{n}$ numerus integer, irrationalitas tolletur; pone igitur $\frac{\theta+1+n\lambda}{n}$ æqualem numero integro r; hinc erit $\theta=rn-\lambda n-1$, proinde ſi Ordinata hanc habeat formam $z^{rn-\lambda n-1}\times\overline{e+fz^{n}}|^{\lambda}$, eam radicalitate ſua liberabis; ponendo $\frac{e+fz^{n}}{z^{n}}=v$, etenim, hoc in caſu, Area huic Ordinatæ competens convertetur in aliam ſibi æqualem cujus Ordinatis erit $\dfrac{-\frac{1}{n}e^{r}v^{\lambda}}{\overline{v-f}|^{r+1}}$.

Si ſit $\lambda=\frac{p}{q}$, tum mavis ponere $\sqrt[q]{\frac{e+fz^{n}}{z^{n}}}=v$, Area cujus Ordinata eſt $z^{rn-\frac{p}{q}n-1}\times\overline{e+fz^{n}}|^{\frac{p}{q}}$ convertetur in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata erit $\dfrac{-\frac{1}{n}qe^{r}v^{t+q-1}}{\overline{v^{q}-f}|^{r+1}}$.

Quod ad Trinomia attinet, ea nullo modo, quod ſciam, Radicalitate ſua exui poterunt, niſi in caſu unico ſimpliciſſimo, cum ita nempe acciderit ut vinculum Trinomii ſit Radix quadratica, tum etiam ut Poteſtas indeterminatæ z extra vinculum poſita ad hanc formam redigi poſſit, z^{rn-n}, poſito utique r numero integro; quo in caſu cuilibet experienti conſtabit, ſublatione ſecundi termini, Trinomium ad Binomium vel Binomia adductum iri, quorum unumquodque ita afficietur poteſtatibus extra vinculum poſitis, ut Radicalitate ſua liberari poſſit.

Sed Trinomium illud multo facilius & concinnius ad Binomia revocari poterit extractione Radicis quadraticæ, ad hunc modum.

Sit igitur $z^{rn-1}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}$ Ordinata irrationalis quam Radicalitate ſua exui oporteat; finge $\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}=m+vz^{n}$, poſito ſcilicet $mm=e$, hinc erit $e+fz^{n}+gz^{2n}=mm+2mvz^{n}+vvz^{2n}$, tunc de-

letis hinc inde æqualibus, residuoque diviso per z^n, prodibit $f+gz^n=2mv+vvz^n$, ex quo elicietur $z^n=\frac{2mv-f}{g-vv}$, adeoque erit $\frac{\dot{z}}{z}=\frac{\frac{2}{n}\dot{v}\times\overline{mg-fv+mvv}}{\overline{2mv-f}\times\overline{g-vv}}$, sed $z^{rn}=\frac{\overline{2mv-f}|^{r}}{\overline{g-vv}|^{r}}$, ex quibus efficietur ut $z^{rn-1}\dot{z}$ sit $=\frac{\frac{2}{n}\dot{v}\times\overline{fg-fv+mvv}\times\overline{2mv-f}|^{r-1}}{\overline{g-vv}|^{r+1}}$, sed ex eo quod sit $z^n=\frac{2mv-f}{g-vv}$, erit $\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}$, sive $m+vz^n=\frac{mg-fv+mvv}{g-vv}$, adeoque $z^{rn-1}\dot{z}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}=\frac{\frac{2}{n}\dot{v}\times\overline{mg-fv+mvv}|^{2}\times\overline{2mv-f}|^{r-1}}{\overline{g-vv}|^{r+1}}$.

Ex his igitur hanc conclusionem deducere licet, si sit $z^{rn-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}$ Ordinata Curvæ cujus Abscissa z, ponaturque $\frac{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}-\sqrt{e}}{z^n}=v$, tunc posita $m=\sqrt{e}$, Area Curvæ, Ordinatæ datæ competens, convertetur in aliam sibi æqualem cujus abscissa v & ordinatim applicata $\frac{\frac{2}{n}\times\overline{mg-fv+mvv}|^{2}\times\overline{2mv-f}|^{r-1}}{\overline{g-vv}|^{r+1}}$, ex quo perspicuum est Ordinatam datam Radicalitate sua liberatum iri, si id acciderit ut numerus r sit integer.

Atque eadem ratione, si Ordinata Curvæ sit $\frac{z^{rn-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$, ponaturque ut antea $\frac{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}-\sqrt{e}}{z^n}=v$, tunc Area Curvæ cui Ordinata data competit, convertetur in aliam sibi æqualem cujus Abscissa v, & Ordinatim applicata $\frac{\frac{2}{n}\times\overline{2mv-f}|^{r-1}}{\overline{g-vv}|^{r}}$.

C O-

COROLLARIUM.

Si quantitas $z^{rn-1}\sqrt{e\pm fz^{n}\pm gz^{2n}}$, dividatur per Binomium aut Trinomium rationale $k\pm hz^{n}$, $l\pm mz^{n}\pm pz^{2n}$, aut facta quotcunque ex talibus Binomiis aut Trinomiis inter se multiplicatis, aut per eorumdem potestates quaslibet integras, tum dicta quantitas sic divisa constituatur Ordinata Curvæ, Area huic Ordinatæ competens convertetur in aliam sibi æqualem, omni Radicalitate liberam, quæ comparari poterit cum Sectionibus conicis; idem dicendum est de Ordinata $\frac{z^{rn-1}}{\sqrt{e\pm fz^{n}\pm gz^{2n}}}$, idemque dicendum de Binomialibus Ordinatis quibuslibet ex earum genere quæ superius tractatæ fuerunt, quæ si possint Radicalitate sua exui antequam dividantur, tum etiam post divisionem Radicalitate sua solventur, quo fiet ut earum Areæ facile ad sectiones Conicas referri possint.

Area Curvæ cujus Ordinata est $z^{rn-1}\times\overline{\frac{e\pm fz^{n}}{g\pm hz^{n}}}\Big|^{\lambda}$ Radicalitate sua liberabitur plurimis quidem modis, sed præsertim modo sequenti qui cæteris mihi videtur anteponendus; pone $\frac{e\pm fz^{n}}{g\pm hz^{n}}=v$, tunc Area Ordinatæ datæ competens, convertetur in aliam sibi æqualem cujus abscissæ v, Ordinata vero $\frac{\frac{1}{n}\times v^{\lambda}\times\overline{fg-he}\times\overline{e-gv}|^{r-1}}{\overline{hv-f}|^{r+1}}$.

CAPUT IV.

De Multinomiis quibusdam in Binomia aut Trinomia resolvendis.

IN Tractatu *De Mensura Sortis*, cum forte incidissem in Æquationes quasdam sic constitutas, ut Coefficientes terminorum hinc inde ab extremis æqualiter distantium, singulæ singulis, æquales inter se essent; facile comperi ejusmodi Æquationes ad alias adduci posse quarum dimensiones dimidio saltem pauciores futuræ essent quam dimensiones Æquationis propositæ.

Hæc vero obſervatio, quam haud ſcio an quiſquam ante me unquam fecerit, poterit uſui eſſe in reſolvendis Multinomiis quibuſdam in Binomia aut Trinomia: quod ut Exemplis oſtendamus.

Proponatur Quinquinomium $z^4 + pz^3 + qzz + pz + 1$ in Trinomia reſolvendum; finge Trinomina bina, $zz + az + 1$, $zz + bz + 1$, e quorum mutuo ductu Multinomium datum generetur, tum facta Multiplicatione, orietur Quinquinomium

$$\begin{aligned} &z^4 + az^3 + abzz + az + 1 \\ &\quad + bz^3 + 2zz + bz \end{aligned}$$

quod ſi comparaveris cum Quinquinomio dato, exurgent Æquationes binæ $a + b = p$, itemque $ab + 2 = q$, e quibus elicitur $a = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + 2}$, atque $b = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + 2}$, quo fit ut Trinomia bina in quæ Quinquinomium datum reſolvitur, jam data ſint.

At vero ſi ita accidat ut quantitas ſub vinculo Radicis incluſa ſit negativa, non ideo ſequitur Multinomium datum non poſſe dividi in Trinomia; etenim nihil aliud inde concludi poterit, niſi quod Trinomia debuiſſent aſſumi ſub alia forma, quæ ut inveniatur, illud obſervandum eſt: ſi Multinomium datum perinde tractetur ac ſi eſſet Æquatio nihilo æqualis, tunc ratione Coefficientium æqualium hinc inde ab extremis æqualiter diſtantium, id neceſſario eveniet ut unaquæque Radicum habeat Radicem quandam alteram ſibi reciprocam: ergo Trinomium utrumque, tanquam nihilo æquale conceptum, continet vel duas radices quarum altera ſit alterius reciproca, vel duas alias quarum utraque habeat ſuam reciprocam in altero Trinomio; porro ſi prior caſus evenerit, tunc Trinomia ad formam præcedentem rediguntur, ſin vero poſterior evenerit, aſſume Trinomium unum $zz + az + b = 0$, Trinomium igitur alterum oportebit aſſumi $\frac{1}{zz} + \frac{a}{z} + b$, vel $zz + \frac{a}{b}z + \frac{1}{b} = 0$, jam ſi Binomia aſſumpta inter ſe multiplicentur, Multinominum genitum erit,

$$\begin{aligned} &z^4 + az^3 + bzz + az + 1 \\ &\quad + \frac{a}{b}z^3 + \frac{aa}{b}zz + \frac{a}{b}z \\ &\qquad + \frac{1}{b}zz \end{aligned}$$

tum comparatione facta cum Multinomio dato, exurgent Æquationes duæ $a + \frac{a}{b} = p$, $b + \frac{aa}{b} + \frac{1}{b} = q$, ex quarum utraque ſi a expungatur, orietur Æquatio

$b^4 +$

$$\begin{array}{l} b^4+2b^3-2qbb+2b+1=0. \\ \quad -qb^3+ppbb-qb \\ \qquad +2bb \end{array}$$

quæ ſi fingatur genita eſſe ex his binis, $bb-fb+1=0$, $bb-gb+1=0$. Deinde fiat comparatio terminorum ſibi mutuo reſpondentium, reperietur $f+g=q-2$, $fg=pp-2q$, adeoque erit $f=\frac{1}{2}q-1+\sqrt{\frac{1}{4}qq+q+1-pp}$, itemque $g=\frac{1}{2}q-1-\sqrt{\frac{1}{4}qq+q+1-pp}$, quibus cognitis b & a innoteſcent.

Ex hac poſteriore formula, ſi Multinomium datum ſit $z^4+4z^3+8zz+4z+1$, Trinomia bina in quæ reſolvitur erunt, $zz+\overline{2+\sqrt{2}}\times z+3+2\sqrt{2}$, & $zz+\overline{2-\sqrt{2}}\times z+3-2\sqrt{2}$.

Proponatur nunc Septinomium $z^6+pz^5+qz^4+rz^3+qzz4pz+1$, in Trinomia reſolvendum; finge Trinomina terna $zz+az+1$, $zz+bz+1$, $zz+cz+1$, e quorum continuo ductu Multinomium datum generetur, tunc facta multiplicatione horum omnium, orietur Septinomium

$$\begin{array}{llllllll} z^6 & +a\times z^5 & +ab\times z^4 & +2a\times z^3 & +ab\times zz & +a\times z & +1 \\ & +b & +ac & +2b & +ac & +b & \\ & +c & +bc & +2c & +bc & +c & \\ & & +3 & +abc & +3 & & \end{array}$$

quod ſi comparetur cum Septinomio dato, exurgent tres Æquationes $a+b+c=p$, $ab+ac+bc=q-3$, $abc=r-2p$, adeoque ex natura Æquationum ſtatim colligitur eſſe $a^3-paa+\overline{q-3}\times a-\overline{r-2p}=0$: quapropter ſi Radices iſtius Æquationis ſint omnes reales, una eademque opera, determinabuntur tres quantitates a, b, c; ſin vero, accidat ut earum una tantummodo ſit poſſibilis, quam pone eſſe a, divide Multinomium datum per $zz+az+1$, tunc quotiens ex hac diviſione ortus hanc obtinebit formam, nimirum $x^4+sz^3+rzz+sz+1$, adeoque ex iis quæ ante tradita fuerunt, quotiens ille in duo Trinomia reſolvetur.

Si Multinomium datum ſit $z^8+pz^7+qz^6+rz^5+sz^4+rz^3+qzz+pz+1$, poterunt aſſumi Trinomia quaterna $zz+az+1$, $zz+bz+1$, $zz+cz+1$, $zz+dz+1$, e quorum continuo ductu Multinomium illud generari fingatur, tum ex debita comparatione obti-

obtinebitur Æquatio quatuor dimensionum involvens valores omnes quantitatum, a, b, c, d.

Sed id multo commodius comperietur, fingere Trinomium $zz + xz + 1$, cujus indeterminata x ponatur complecti hos omnes valores; etenim ex Multinomio dato, & Trinomio, ad instar Æquationis nihilo æqualis utroque habito, si quantitas z expungatur, obtinebitur Æquatio $x^4 - px^3 + \overline{q-4}\,xx + \overline{r-3p}\,x + s - 2q + 2 = 0$. cujus si omnes Radices sint possibiles, eadem opera determinabuntur quantitates omnes a, b, c, d.

At si earum duæ tantummodo sint possibiles, quas pone esse a & b; divide Multinomium datum per id quod factum sit ex Trinomiis binis $zz + az + 1$, $zz + bz + 1$, tunc valores reliquarum c & d determinabuntur ope Quotientis.

Quod si ita acciderit ut quantitatum a, b, c, d nulla sit possibilis, finge Quinquinomia bina $z^4 + ez^3 + fzz + gz + h$, $z^4 + \frac{g}{h}z^3 + \frac{f}{h}zz + \frac{e}{h}z + \frac{1}{h}$, e quorum mutuo ductu Multinomium datum generari intelligatur, tum ex debita comparatione inter se terminorum Multinomii geniti & terminorum Multinomii dati, exurgent quatuor Æquationes e quibus si quantitates omnes assumptæ præter b expellantur, incides in Æquationem octo dimensionum ita constitutam ut Coefficientes omnes æqualiter ab extremis distantes futuræ sint inter se æquales, hæc vero ad quatuor dimensiones deprimi poterit, ponendo $bb + bv + 1 = 0$; quod reliquum est conficietur Regula *Cartesii* qua dissolvuntur Æquationes quatuor dimensionum in duas Trinomiales.

Si detur Multinomium ex partibus numero paribus conflatum atque ita affectum ut Coefficientes terminorum ab extremis æqualiter distantium sint inter se æquales, Multinomium illud ad Multinomium proxime inferius adducetur; etenim si Multinomium datum sit $z^7 + pz^6 + qz^5 + rz^4 + rz^3 + qzz + pz + 1$, quod finxeris nihilo æquale, tunc positâ $z = -1$, reperies $-1 + p - q + r - r + q - p + 1$, quæ quantitates cum sese mutuo destruant, indicio est Multinomium datum dividi posse per $z + 1$.

Si cui sit in animo hanc speculationem ulterius prosequi, ei adjumento sequentia fortasse erunt quæ in Tabellam contulimus; sint igitur Multinomia

z^4

$$z^4+pz^3+qzz+pz+1$$
$$z^6+pz^5+qz^4+rz^3+qzz+pz+1$$
$$z^8+pz^7+qz^6+rz^5+sz^4+rz^3+qzz+pz+1$$
$$z^{10}+pz^9+qz^8+rz^7+sz^6+tz^5+sz^4+qz^3+pzz+qz+1$$
$$z^{12}+pz^{11}+qz^{10}+rz^9+sz^8+tz^7+vz^6+tz^5+sz^4+rz^3+qzz+pz+1$$

tunc si ponatur $zz+xz+1=0$, erunt

$$xx-px+\overline{q-2}=0$$
$$x^3-pxx+\overline{q-3}\times x-\overline{r-2p}=0$$
$$x^4-px^3+\overline{q-4}\times xx-\overline{r-3p}\times x+\overline{s-2q+2}$$
$$x^5-px^4+\overline{q-5}\times x^3-\overline{r-4p}\times xx+\overline{s-3q+5}\times x+\overline{t-2r+2p}$$
$$x^6-px^5+\overline{q-6}\times x^4-\overline{r-5p}\times x^3+\overline{s-4q+9}\times xx+\overline{t-3r+5p}\times x+v-2s+2q-2.$$

lex autem continuationis istarum Æquationum facile in Canonem adduci potest ad hunc modum; sit igitur Multinomium datum

$$z^{2n}+pz^{2n-1}+qz^{2n-2}+rz^{2n-3}\ldots\ldots+yz^n\ldots\ldots+rz^3+qzz+qz+1.$$

in quo y designet Coefficientem termini medii, sit præterea $zz+xz+1=0$, tunc erit

$$x^n-p\times x^{n-1}+q\times x^{n-2}-r\times x^{n-3}+s\times x^{n-4}-t\times x^{n-5}+v\times x^{n-6}-y\times x^{n-7}\ \&c.=0.$$
$$-n\quad+\overline{n-1}\times p-\overline{n-2}\times q+\overline{n-3}\times r-\overline{n-4}\times s+\overline{n-5}\times t$$
$$+\frac{n}{1}\times\frac{\overline{n-3}}{2}-\frac{\overline{n-1}}{1}\times\frac{\overline{n-4}}{2}p+\frac{\overline{n-2}}{1}\times\frac{\overline{n-5}}{2}\times q-\frac{\overline{n-3}}{1}\times\frac{\overline{n-6}}{2}r$$
$$-\frac{n}{1}\times\frac{\overline{n-4}}{2}\times\frac{\overline{n-5}}{3}+\frac{\overline{n-1}}{1}\times\frac{\overline{n-5}}{2}\times\frac{\overline{n-6}}{3}p.$$



LIBER



LIBER IV.

CAPUT I.

De summis Serierum recurrentium.

PROBLEMA I.

D*Ata Serie qualibet recurrente,* $a+bx+cxx+dx^3+ex^4$ *&c. cujus relationis Scala sit* $f-g$; *invenire summam talis Seriei in infinitum continuatæ.*

SOLUTIO.

Disponantur termini Seriei una cum Æquationibus adjunctis eodem ordine quo disponuntur numeri vulgares in unam summam colligendi, ut sequitur,

$P=P$
$Q=Q$
$R=fQx-gPxx$
$S=fRx-gQxx$
$T=fSx-gRxx$
&c.

quo facto, si summa terminorum P, Q, R, S, T &c. in infinitum, e quibus conflatur prima Columna ponatur $=z$; tunc summæ sequentium Columnarum sic designabuntur: ex Hypothesi est $P+Q+R+S+T$ &c. $=z$, erit igitur, $Q+R+S+T$ &c. $=z-P$; ducantur omnia in fx, hinc habebitur $fQx+fRx+fSx+fTx$ &c. $=fxz-fPx$; addantur utrobique $P+Q$, erit igitur summa 2ª Columnæ

lumnæ hoc est $P+Q+fQx+fRx+fSz+fTx$ &c. $=$ $P+Q+fxz-fPx$; summa vero tertiæ Columnæ, statim percipitur designari oportere per $+gxxz$; his ita designatis, cum summa terminorum primæ Columnæ æqualis sit summis terminorum secundæ & tertiæ; perspicuum est fore $z=P+P+fxz-fPx-gxxz$,

$$\text{sive } z=\frac{P+Q-fPx}{1-fx+gxx}=\frac{\begin{matrix}a+bx\\-fax\end{matrix}}{1-fx+gxx}.$$

PROBLEMA II.

Hoc posito, Scalam relationis, in Serie qualibet recurrente, $a+bx+cxx+dx^3+ex^4$ *&c. conflari ex tribus partibus* $f-g+h$, *invenire summam Seriei.*

SOLUTIO.

Eadem Analysi qua usi fuimus in superiore Problemate invenietur summa Seriei $=$

$$\frac{\begin{matrix}a+bx+cxx\\-fax-fbxx\\+gaxx\end{matrix}}{1-fx+gxx-hx^3}$$

atque eodem modo, si Scala relationis componatur ex quatuor partibus, $f-g+h-k$, erit summa Seriei

$$\frac{\begin{matrix}a+bx+cxx+dx^3\\-fax-fbxx-fcx^3\\+gaxx+gbx^3\\-hax^3\end{matrix}}{1-fx+gxx-hx^3+kx^4}$$

PROBLEMA III.

Data Serie qualibet recurrente, invenire Summam terminorum quotlibet quorum multitudo data sit.

SOLUTIO.

Sit Series recurrens, $a + bx + cxx + dx^3 + ex^4$ &c. cujus termini duo primi ponantur sumi ad libitum: sit $f - g$ Scala relationis, l numerus terminorum quorum summa requiratur, $\alpha x^l + \beta x^{l+1}$, termini duo proxime insequentes ultimum datorum; his positis, erit summa desiderata

$$\frac{a + bx - fax - x^l \times \overline{\alpha + \beta x - f\alpha x}}{1 - fx + gxx}$$

Eodem modo si termini tres primi sumantur ad libitum, sitque $f - g + h$ ea relationis Scala qua reliqui determinantur, l numerus terminorum datus, $\alpha x^l + \beta x^{l+1} + \gamma x^{l+2}$ termini tres proxime insequentes ultimum datorum; tunc erit summa desiderata

$$\frac{a + bx + cxx - fax - fbxx + gaxx - x^l \times \overline{\alpha + \beta x + \gamma xx - f\alpha x - f\beta xx + g\alpha xx}}{1 - fx + gxx - hx^3}$$

Lex autem talium Theorematum in infinitum ex formatione præcedentium satis perspicitur, nec ulteriori explicatione indiget; porro ex data relationis Scala, Series poterit continuari donec obtineantur Coefficienter α, β, γ; adeoque summa terminorum quorum numerus datus sit semper invenietur.

Attamen si ita evenerit ut numerus terminorum datus, sit permagnus; continuatio Seriei nimis molesta evadet; quo in casu operæ pretium erit uti ea methodo quam exposuimus in Theoremate 3° Libri secundi, quæ tunc usui potissimum erit, cum Radices ejus Æquationis quæ efficitur ex Scala relationis, erunt omnes reales & inæquales; etenim solo subsidio maximæ Radicis, plerumque invenietur approximatio sufficiens ad terminum desideratum, cujus rei Exemplum in Problemate sequente afferemus, quod tamen priusquam aggrediamur non alienum erit hoc loco subjicere Corollarium ex superius dictis facile deducendum.

COROLLARIUM.

Si dividatur Unitas per Multinomium rationale, tum Seriei ex hac divisione exurgentis sumantur termini omnes alterni, vel termini om-

omnes, binis, ternis, quaternis, aut pluribus intervallis a se invicem distantibus, novæ Series ex his terminis conflatæ accurate summari poterunt.

EXEMPLUM I.

Sit $1+x+2xx+3x^3+5x^4+8x^5+13x^6+21x^7+34x^8$ &c. Series nata ex divisione Unitatis per Trinomium $1-x-xx$, sumantur termini omnes alterni, initio facto a primo; sumantur itidem termin omnes alterni, initio facto a secundo, ex quibus conficiantur Series binæ

$1+2xx+5x^4+13x^6+34x^8$ &c.

$x+3x^3+8x^5+21x^6+55x^8$ &c.

Fingatur Denominator $1-x-xx=o$; jam vero cum indices potestatum indeterminatæ x se invicem superent communi differentia 2, pone $xx=z$; tunc si ope binarum æquationum $1-x-xx=o$, $xx=z$, expellatur quantitas x, orietur Æquatio nova $1-3z+zz=o$, sive x restitutâ, $1-3xx+x^4=o$, jam si dividatur hæc æquatio per priorem $1-x-xx=o$, orietur quotiens $1+x-xx$, cujus si sumantur termini omnes alterni propter terminos Seriei datæ alternatim sumptos, ex his conficientur summæ binæ $1-xx$ & x, quæ si constituantur Numeratores fractionum binarum quarum communis Denominator sit $1-3xx+x^4$ fractiones $\frac{1-xx}{1-3xx+x^4}$, $\frac{x}{1-3xx+x^4}$, sic genitæ, atque ordinatim sumptæ, erunt summæ novarum Serierum.

EXEMPLUM II.

Si vero desiderentur summæ terminorum ternis intervallis inter se distantium, pone ut prius $1-x-xx=o$, jam vero cum indices potestatum in novis Seriebus se invicem superent communi differentia 3, pone iterum $x^3=z$; quo facto, orietur nova Æquatio $1-4z-zz$ sive $1-4x^3-x^6=o$, quæ si dividatur per $1-x-xx$, quotiens erit $1+x+2xx-x^3+x^4$, termini ad terna intervalla ordinatim sumpti conficient tres summas $1-x^3$, $x+x^4$, $2xx$ quæ si constituantur Numeratores trium fractionum quarum Denominator communis sit $1-4x^3-x^6$, fractiones illæ ordinatim sumptæ erunt tres summæ novarum Serierum quarum termini singuli ordinatim sumpti, ternis intervallis inter se distent, & eodem modo pergere licet ad intervalla quaterna aut altiora, tum etiam ad Multinomia quælibet.

 PRO-

PROBLEMA IV.

A & B quorum Dexteritates sint in ratione data a *ad* b, *ea conditione ludant, ut quoties* A *ludum unum vicerit,* B *ipsi tradat nummum unum; quoties vero* B *vicerit,* A *itidem ipsi tradat nummum unum: & non prius ludo desistant quam eorum alter nummos omnes alterius lucratus fuerit. Quæritur quam probabile futurum sit ut Certamen neque intra datum ludorum numerum* x, *neque expirante illo numero concludatur.*

CASUS I.

Ponamus 1° rationem a ad b esse æqualitatis, eumque nummorum numerum quem uterque Collusorum habeat esse parem, *v. g.* 10.

SOLUTIO.

Exponantur Probabilitates Certaminis non finiendi intra ludos 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 &c. per quantitates P, Q, R, S, T, V, X, Y, Z &c.

Patet fore $P=1$, $Q=1$, $R=1$, $S=1$, $T=1$; etenim certum est ludendi finem non eventuram ante pauciores ludos quam decem.

Jam terminus quisque post quinque primos ad quinque antecedentes refertur per constantem relationis scalam quæ hoc in casu erit $\frac{10}{4} - \frac{35}{16} + \frac{50}{64} - \frac{25}{256} + \frac{2}{1024}$, cujus relationis Scala, lex generalis hæc est; nimirum posito n numero nummorum quos uterque Collusorum habet, positâ etiam $r=\frac{1}{4}$, qualiscunque futurus sit numerus n; erit terminus quisque relatus ad tot antecedentes quot sunt Unitates in $\frac{1}{2}n$, si fuerit n numerus par, vel in $\frac{n-1}{2}$, si fuerit impar, ad hunc modum

$$V=nrT-\frac{n}{1}\times\frac{n-3}{2}rrS+\frac{n}{1}\times\frac{n-4}{2}\times\frac{n-5}{3}r^3R$$
$$-\frac{n}{1}\times\frac{n-5}{2}\times\frac{n-6}{3}\times\frac{n-7}{4}r^4Q \text{ \&c. *}$$

Qua-

* Vide Librum anglice scriptum de Sorte, qui inscribitur, *The Doctrine of Chances.*

Quapropter, si ex data relationis Scala conficiatur Æquatio $x^5 - \frac{10}{4}x^4 + \frac{35}{16}x^3 - \frac{50}{64}xx + \frac{25}{256}x - \frac{2}{1024} = 0$, cujus Radices sint m, p, q, s, t: resolvetur Series terminorum $P + Q + R + S + T + V$ &c. in quinque Progressiones geometricas,

$$A + Am + Amm + Am^3 + Am^4 \text{ \&c.}$$
$$B + Bp + Bpp + Bp^3 + Bp^4 \text{ \&c.}$$
$$C + Cq + Cqq + Cq^3 + Cq^4 \text{ \&c.}$$
$$D + Ds + Dss + Ds^3 + Ds^4 \text{ \&c.}$$
$$E + Et + Ett + Et^3 + Et^4 \text{ \&c}$$

Sed ex Theoremate quarto Libri primi, invenietur

$$A = \frac{\begin{array}{lllll} T - p \times S & + pq \times R & - pqs \times Q & + pqst \times P \\ - q & + ps & - pqt & \\ - s & + pt & - pst & \\ - t & + qs & - qst & \\ & + qt & & \\ & + st & & \end{array}}{\overline{m-p} \times \overline{m-q} \times \overline{m-s} \times \overline{m-t}}$$

Sive propter $T = S = R = Q = P = 1$, invenietur

$$A = \frac{\overline{1-p} \times \overline{1-q} \times \overline{1-s} \times \overline{1-t}}{\overline{m-p} \times \overline{m-q} \times \overline{m-s} \times \overline{m-t}}, \quad B = \frac{\overline{1-q} \times \overline{1-s} \times \overline{1-t} \times \overline{1-m}}{\overline{p-q} \times \overline{p-s} \times \overline{p-t} \times \overline{p-m}},$$

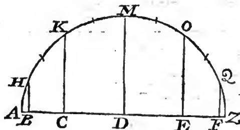
$$C = \frac{\overline{1-s} \times \overline{1-t} \times \overline{1-m} \times \overline{1-p}}{\overline{q-s} \times \overline{q-t} \times \overline{q-m} \times \overline{q-p}}, \quad D = \frac{\overline{1-t} \times \overline{1-m} \times \overline{1-p} \times \overline{1-q}}{\overline{s-t} \times \overline{s-m} \times \overline{s-p} \times \overline{s-q}},$$

$$E = \frac{\overline{1-m} \times \overline{1-p} \times \overline{1-q} \times \overline{1-s}}{\overline{t-m} \times \overline{t-p} \times \overline{t-q} \times \overline{t-s}}.$$

Quapropter si Radices m, p, q, s, t dentur, dabitur & Probabilitas Certaminis non finiendi intra datum quemlibet ludorum numerum x, quæ utique erit $Am^{\frac{1}{2}x} + Bp^{\frac{1}{2}x} + Cq^{\frac{1}{2}x} + Ds^{\frac{1}{2}x} + Et^{\frac{1}{2}x}$. Sed divisâ in partes æquales decem semicircumferentiâ circuli cujus diameter AZ sit Unitas; si a primo, tertio, quinto, septimo, nono, divisionis termino demittantur ad dimetrum perpendicula HB, KC, MD, OE, QF, erunt sinus versi ZB, ZC, ZD, ZE, ZF æquales Radicibus m, p,

p, q, s, t, quod conſtat ex Æquationibus ad circulum vulgo notis, proinde Radices illæ dabuntur.

Huc uſque proceſſeram in Libro anglice ſcripto *de Sorte*, ſed paulo poſt editum librum, Solutionem hanc ulterius perduxeram, nimirum inventione methodi qua producta $\overline{1-p}\times\overline{1-q}\times\overline{1-s}\times\overline{1-t}$, & $\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}\times\overline{m-t}$, facilius determinari poſſent quam per vulgarem multiplicationem; diviſâ utique ſemicircumferentiâ ut præſcriptum fuit, inveneram eſſe $\overline{1-p}\times\overline{1-q}\times\overline{1-s}\times\overline{1-t}=\frac{1}{2^9\times AB}$, & generaliter $\frac{1}{2^{n-1}\times AB}$; productum vero $\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}\times\overline{m-t}$ inveneram eſſe $=\frac{10}{2^{10}\times BH}$, & generaliter $\frac{n}{2^n\times BH}$: eſt igitur $A=\frac{2BH}{n\times AB}$, & propter eandem rationem, $B=\frac{2CK}{n\times AC}$, & ſic deinceps. Quamobrem erit Probabilitas Certaminis non finiendi intra datum ludorum numerum $x=\frac{2BH}{n\times AB}\times m^{\frac{1}{2}x}-\frac{2CK}{n\times AC}\times p^{\frac{1}{2}x}+\frac{2DM}{n\times AD}\times q^{\frac{1}{2}x}-\frac{2EO}{n\times AE}\times s^{\frac{1}{2}x}+\frac{2QF}{n\times AF}\times t^{\frac{1}{2}x}$. Jam vero ſi hæc formula transferatur ad circulum cujus Radius ſit Unitas, Solutio ſic poterit enunciari.



Centro D, intervallo $DA=1$, deſcribatur ſemicircumferentia AMZ quæ dividatur in tot partes æquales, quot ſunt Unitates in n: tum ex primo H, tertio K, quinto M, ſeptimo O, & impari quoque diviſionis termino, demittantur ad Diametrum AZ perpendicula HB, KC, MD, OE, QF; ponatur $Q=\frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}}-\frac{CK^{x+1}}{AC^{\frac{1}{2}x+1}}$

+

$+\frac{DM^{x+1}}{AD^{\frac{1}{2}x+1}} - \frac{EO^{x+1}}{AE^{\frac{1}{2}x+1}}$ &c. tunc erit ultimus Seriei propositæ terminus, hoc est terminus ille cujus locus designatur per $\frac{1}{2}x$, æqualis quantitati $\frac{Q}{2^{\frac{1}{2}x-1}n}$, quæ proinde designabit probabilitatem Certaminis non finiendi intra eum ludorum numerum quem x indicat; erit igitur probabilitas Certaminis finiendi intra datum ludorum numerum x, ad probabilitatem nou finiendi, ut $2^{\frac{1}{2}x-1}n - Q$ ad Q.

Si sinus rectus dimidii Arcus AH nominetur s, commode substituetur $2ss$ in locum sinus versi AB; quod etiam valet in reliquis.

COROLLARIUM.

Si sumatur pro Q terminus primus $\frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}}$, neglectis cæteris, modo sit x numerus magnus respectu numeri n, obtinebitur approximatio sufficiens ad terminum desideratum; Exempli gratia, si sit $n=10$, & $x=76$, tum sumatur pro Q terminus primus neglecti cæteris, invenietur Probabilitas Certaminis finiendi intra ludos non plures quam 76, ad Probabilitatem non finiendi, ut 50747 ad 49253; si vero sumantur pro Q termini bini primi, neglectis cæteris, invenietur ratio Probabilitatum ut 50743 ad 49247.

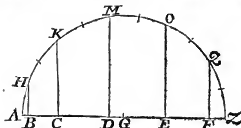
CASUS II.

Ponamus iterum rationem a ad b esse æqualitatis, sed nummorum numerum quos uterque Collusorum habeat esse imparem.

SOLUTIO.

Analysis in casu impari videtur aliquantulum differre a priore, sed cum utraque conclusio ad eandem redigi possit, nullam hic aliam censui apponendam solutionem quam ea quæ cum primo casu congruit. Quamobrem

Cen-



Centro G, intervallo $GA=1$, deſcribatur ſemicircumferentiæ AMZ quæ dividatur in tot partes æquales quot ſunt Unitates in numero n; tum ex primo H, tertio K, quinto M, ſeptimo O, & impari quoque diviſionis termino, demittantur ad Diametrum perpendicula HB, KC, MD, OE, QF; ponatur $Q=\frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}}-\frac{KC^{x+1}}{AC^{\frac{1}{2}n+1}}+\frac{MD^{x+1}}{AD^{\frac{1}{2}x+1}}$ $\frac{OE^{x+1}}{AE^{\frac{1}{2}x+1}}+\frac{QF^{x+1}}{AF^{\frac{1}{2}x+1}}$; quo facto, erit Probabilitas Certaminis finiendi intra ludos non plures quam x, ad Probabilitatem non finiendi, ut $2^{\frac{1}{2}x+1}n-Q$ ad Q.

COROLLARIUM I.

Si ſumatur pro Q terminus primus, neglectis cæteris, obtinebitur approximatio ſufficiens ad terminum deſideratum; Exempli gratia, ſi ſit $n=45$, & datus ludorum numerus $x=1519$, invenietur ratio Probabilitatis certaminis finiendi intra ludos non plures quam 1519, ad Probabilitatem non finiendi ut 49559 ad 50441; at vero ſi adhibeantur pro Q termini duo primi, neglectis cæteris, invenietur ratio harum Probabilitatum ut 49569 ad 50431: quæ ratio eſt vero proxima.

COROLLARIUM II.

Hinc facile eſt invenire quotenis ludis, Probabilitates certaminis finiendi, & non finiendi evadent proxime æquales; etenim ſi pro Q ſumatur terminus unicus $\frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}}$ ponatur que $2^{\frac{1}{2}x-n}n-Q=Q$, ſive

$Q=$

$Q = 2^{\frac{1}{2}\overline{x-2}} n$; invenietur $x = 0.756nn$ proxime, ſive fuerit n numerus par, ſive impar: quod ſequente Analyſi plane conſtabit.

Ex ſuperiori Æquatione deducitur hæc Æquatio logarithmica, nimirum $\overline{x+1} \times \log. HB - \frac{1}{2}\,\overline{x+1}\,\log. AB = \frac{1}{2}\,\overline{x-2}\,\log. 2 + \log. n$, unde $x = \frac{2\log. HB - 2\log. AB + 4\log. 2 - 2\log. n}{\log. 2 + \log. AB - 2\log. HB}$; pone n eſſe maximum numerum, ſive, quod eodem recidit, pone arcum AH eſſe valde exiguum; ſit arcus ille $= z$, erit igitur ſinus rectus $HB = z \times \overline{1 - \frac{1}{6}zz}$ proxime, & Sinus verſus $AB = \frac{zz}{2} \times \overline{1 - \frac{1}{12}zz}$ proxime; ſed logarithmus quantitatis $1 - \frac{1}{6}zz = -\frac{1}{6}zz$ proxime, & logarithmus quantitatis $1 - \frac{1}{12}zz = -\frac{1}{12}zz$ proxime, quapropter erit

$$x = \frac{24\log. 2 - 8\log. z - \frac{2}{3}zz - 8\log. n}{zz}.$$

Sit a Semicircumferentia circuli ad radium 1; erit igitur $z = \frac{a}{n}$, & $\log. z = \log. a - \log. n$, quamobrem ſubſtitutis his valoribus in locum z & $\log. z$, obtinebitur $x = \frac{24nn\log. 2 - 8nn\log. a}{aa} - \frac{2}{3}$, ſive, neglecta fractione $\frac{2}{3}$, $x = \frac{24nn\log. 2 - 8nn\log. a}{aa}$, ſed $\frac{24\log. 2 - 8\log. a}{aa} = 0.756$ proxime, adeoque $x = 0.756nn$ proxime.

Clariſſimus *Monmort*, in ſecunda Editione libri ſui inſcripti, *Analyſe des jeux de bazard*, ſcribit ſe inveniſſe, ſi n denotaverit numerum nummorum imparem, ponaturque $\frac{n+1}{2} = p$, quantitatem $3pp - 3p + 1$ *ſemper* denotaturam eum ludorum numerum intra quem quivis poſſit potiori conditione contendere certamen finitum iri. Interim fatetur ſe non potuiſſe talem formulam invenire pro Ludorum numero pari.

Circa quod, hæc obſervari poſſunt, primum formulam $3pp - 3p + 1$ ad $\frac{3}{4}nn + \frac{1}{4}$ adduci poſſe, ſive ſimpliciter ad $\frac{3}{4}nn$, cum fractio $\frac{1}{4}$, præ quantitate $\frac{3}{4}nn$, quodam modo evaneſcat: deinde expreſſionem

 adhi-

adhibitam a Clarissimo Viro, non multum quidem a vero aberrare, si fuerit n numerus parvus, attamen in magnis numeris errorem ex hac formula oriundum futurum esse alicujus momenti; præterea Viri Cl. Regulam æque bonam esse in ludorum numero pari, ac in impari; postremo, quantitatem $3pp - 3p + 1$, seu $\frac{3}{4}nn + \frac{1}{4}$, neque in pari neque in impari casu *semper* indicaturam eum Ludorum numerum intra quem quis contendere queat, idque *potiori* conditione certamen finitum iri; etenim si fuerit is nummorum numerus quem uterque Collusorum habeat 45, quod est Exemplum a D° *Monmort* allatum, erit $3pp - 3p + 1 = 1519$, attamen Probabilitas Certaminis finiendi intra hunc ludorum numerum minor erit Probabilitate non finiendi, in ea ratione quam habet 49569 ad 50431 proxime.

CASUS III.

Positis cæteris ut in primo vel secundo casu; sit a ad b ratio inæqualitatis.

SOLUTIO.

Pone $\frac{a^n + b^n}{\overline{a+b}|^n} = L$, $\frac{\overline{a-b}|^2}{\overline{a+b}|^2} = d$, $\frac{ab}{\overline{a+b}|^2} = r$. esto $1, 2r :: \frac{HBq}{AB}$, $m :: \frac{CKq}{AC}$, $p :: \frac{MDq}{AD}$, $q :: \frac{OEq}{AE}$, $s :: \frac{QFq}{AF}$, t.

Pone etiam $Q = \frac{HB}{2rAB + d} m^{\frac{1}{2}x} - \frac{CK}{2rAC + d} p^{\frac{1}{2}x} + \frac{MD}{2rAD + d} q^{\frac{1}{2}x}$. &c. quo facto, erit Probabilitas certaminis finiendi intra Ludos non plures quam x, ad Probabilitatem non finiendi, ut $n r^{\frac{1}{2}n-1} - 2LQ$ ad $2LQ$.

COROLLARIUM I.

Si sumatur pro Q terminus primus $\frac{HB}{2rAB + d} m^{\frac{1}{2}x}$ neglectis cæteris, habebitur approximatio sufficiens, modo fuerit x satis magnus respectu n.

COROL-

COROLLARIUM II.

Posito $\mathcal{Q} = \frac{HB}{2rAB + d} m^{\frac{1}{2}x}$, tunc ex Æquatione $4L\mathcal{Q} = nr^{\frac{1}{2}x - 1}$, facile invenietur per primos Serierum infinitarum terminos valor quantitatis x, quo proxime determinatur is ludorum numerus qui requiritur ad constituendam æqualem Probabilitatem Certaminis finiendi & non finiendi.

COROLLARIUM III.

Et eodem modo id determinabitur, quoteni ludi requirantur ad constituendas eas Probabilitates Certaminis finiendi, & non finiendi quæ sint in ratione data.

COROLLARIUM IV.

Si Collusorum nummi, incipiente Certamine, sint inæquales, Solutiones præcedentium similes sed aliquanto complicatiores exhiberi poterunt.

CAPUT II.

De inveniendis Seriei Terminis.

PROBLEMA I.

Invenire Terminum assignatum Seriei cujuslibet Trinomialis.

SOLUTIO.

Seriem eam Trinomialem appello, ex cujus relationis Scala conficitur Æquatio trinomialis; sic Series recurrens $a + bx + cxx + dx^3 + ex^4$ &c. cujus relationis scala ponitur esse $f - g$, cujus proinde Æquatio ex relationis scala confecta, nimirum $xx - fx + g = 0$, erit trinomialis: jam si id requiratur ut hujus Seriei Terminus quilibet, cujus locus datus sit, assignetur; pone m & p esse Radices Æquationis $xx - fx + g = 0$, atque $l + 1$ designare locum termini desiderati, sive esse l intervallum inter primum Seriei terminum & terminum illum

 cujus

cujus locus assignatur: pone $A = \frac{\overline{b+m-f}\times a}{m-p}$, $B = \frac{\overline{b+p-f}\times a}{p-m}$, tunc erit Coefficiens termini desiderati $Am^l + Bp^l$, adeoque erit terminus ipse $\overline{Am^l + Bp^l}\,xx^l$ facile ad numeros accommodandus si ita acciderit ut m & p sint Radices possibiles.

Sin vero, sint m & p Radices impossibiles, converte $m-p$ in $2m-f$ ipsi æqualem, itemque $p-m$ in $2p-f$, ut habeatur $A = \frac{\overline{b+m-f}\times a}{2m-f}$, & $B = \frac{\overline{b+p-f}\times a}{2p-f}$, quibus ad eundem denominatorem adductis, invenietur $Am^l = \frac{2apm - 2afp + 2bp - afm + aff - bf}{4mp - 2mf - 2pf + ff}\times m^l$

$$Bp^l = \frac{2amp - 2afm + 2bm - afp + aff - bf}{4mp - 2pf - 2mf + ff}\times p^l$$

Sumantur sigillatim termini omnes respondentes amborum Numeratorum, addanturque ii ad se invicem; quo facto, adducantur perpetuo summæ ad coefficientes Scalæ.

Sic, termini duo primi conficiunt summam $\overline{2apm}\times m^l + \overline{2amp}\times p^l$; sed ex natura Æquationis $xx - fx + g = 0$, cujus Radices ponuntur esse m & p, est $mp = g$, adeoque summa horum terminorum redigitur ad $2ag\times\overline{m^l + p^l}$.

Termini duo sequentes ad se invicem additi, conficiunt summam $-2afp\times m^l - 2afm\times p^l$: pro $2afp\times m^l$ scribe $-2afpm\times m^{l-1}$, atque iterum pro $2afm\times p^l$ scribe $2afmp\times p^{l-1}$; sed $pm = g$, erit igitur summa secunda $-2afg\times\overline{m^{l-1} + p^{l-1}}$.

Summa tertia eodem operandi modo invenietur esse $2bg\times\overline{m^{l-1} + p^{l-1}}$

Summa quarta erit $-af\times\overline{m^{l+1} + p^{l+1}}$

Summa quinta erit $aff\times\overline{m^l + p^l}$

Summa sexta erit $-bf\times\overline{m^l + p^l}$

Denominator propter $mp = g$, & $m + p = f$, adducetur ad $4g - ff$.

Erit itaque summa $Am^l + Bp^l =$

$$\frac{\overline{-2afg + 2bg}\times\overline{m^{l-1} + p^{l-1}} + \overline{2ag + aff - bf}\times\overline{m^l + p^l} - af\times\overline{m^{l+1} + p^{l+1}}}{4g - ff}$$

Sed

Sed $m^{l+1}+p^{l+1}=f\times\overline{m^{l}+p^{l}}-g\times\overline{m^{l-1}+p^{l-1}}$.

Quapropter, si ad communem Radium 1, sumantur tres Arcus quorum secundus sit primi multiplex in ea ratione quam habet $l-1$ ad 1, tertius vero ejusdem multiplex in ea ratione quam habet l ad 1; sitque præterea $\frac{f}{2\sqrt{g}}$ Cosinus primi, $\frac{D}{2\sqrt{g^{l-1}}}$ Cosinus secundi, $\frac{E}{2\sqrt{g^{l}}}$ Cosinus tertii, tunc erit $m^{l-1}+p^{l-1}=D$, atque $m^{l}+p^{l}=E$, adeoque erit $Am^{l}+Bp^{l}=\frac{\overline{2bg-afg}\times D+\overline{2ag-bf}\times E}{4g-ff}$, ubi illud observari potest quod si ponatur s æqualis Sinui recto Arcus ejus cujus $\frac{f}{2\sqrt{g}}$ est Cosinus, tunc poterit Denominator $4g-ff$ converti in $4gss$.

PROBLEMA II.

Invenire Terminum quemlibet cujus locus assignetur in Serie emergente ex divisione Unitatis per potestatem $\overline{1-fx}|^{s}$, posito s numero integro.

SOLUTIO.

Sit l intervallum inter Terminum primum, & Terminum illum cujus locus assignatur; quo posito erit Terminus requisitus $=$ $\frac{\overline{l+s-1}}{1}\times\frac{\overline{l+s-2}}{2}\times\frac{\overline{l+s-3}}{3}\times\frac{\overline{l+s-4}}{4}\ldots\ldots\ldots\times f^{l}z^{l}$ ad tot factores ante ultimum $f^{l}z^{l}$ continuandus, quot sunt unitatis in $s-1$.

COROLLARIUM.

Cum series Numeratorum constituat progressionem arithmeticam decrescentem, cujus primus terminus est $l+s-1$, differentia 1, numerus terminorum $s-1$, erit Numerator factoris ultimi $=l+1$, quapropter si invertatur series Numeratorum, poterit terminus requisitus exprimi per $\frac{\overline{l+1}}{1}\times\frac{\overline{l+2}}{2}\times\frac{\overline{l+3}}{3}\times\frac{\overline{l+4}}{4}\times\frac{\overline{l+5}}{5}\times\frac{\overline{l+6}}{6}\ldots\ldots f^{l}z^{l}$ ad tot factores ante ultimum continuandus quot sunt Unitates in $s-1$.

PRO-

PROBLEMA III.

Invenire Terminum quemlibet cujus locus assignetur in Serie nata ex divisione Unitatis per potestatem integram $\overline{1-fx-gxx}^{\,s}$.

SOLUTIO.

Sit l intervallum Termino primo & Termino quæsito interjacens, tunc erit Terminus quæsitus =

$$\frac{\overline{l+s-1}}{1} \times \frac{\overline{l+s-2}}{2} \times \frac{\overline{l+s-3}}{3} \times \frac{\overline{l+s-4}}{4} \ldots\ldots\ldots f^l z^l$$

ad tot factores ante ultimum $f^l z^l$ continuandus, quot sunt Unitates in $s-1$,

$$+\frac{s}{1} \times \frac{\overline{l+s-2}}{1} \times \frac{\overline{l+s-3}}{2} \times \frac{\overline{l+s-4}}{3} \times \frac{\overline{l+s-5}}{4} \ldots\ldots\ldots f^{l-2} g z^l$$

ad tot factores post primum s, & ante ultimum $f^{l-2} g z^l$ continuandus quot sunt Unitates in s,

$$\frac{s}{1} \times \frac{\overline{s+1}}{2} \times \frac{\overline{l+s-3}}{1} \times \frac{\overline{l+s-4}}{2} \times \frac{\overline{l+s-5}}{3} \times \frac{\overline{l+s-6}}{4} \ldots\ldots\ldots f^{l-4} g g z^l$$

ad tot factores continuandus post primum $\frac{s \times \overline{s+1}}{2}$, & ante ultimum $f^{l-4} g g z^l$ quot sunt Unitates in $s+1$. &c.

PROBLEMA IV.

Invenire Terminum quemlibet cujus locus assignetur in Serie nata ex divisione Unitatis per Multinomium quodcunque.

SOLUTIO.

Quanquam satis pateat ex iis quæ ante diximus non necesse futurum ad inventionem Termini, ut ultra Trinomium ascendatur, modo multinomium datum possit resolvi in Binomia & Trinomia; attamen cum talis resolutio possit in plerisque casibus videri perdifficilis ne dicam impossibilis, cumque multi fortasse id exoptaverint ut Terminus possit accurate exhiberi, ut ut laboriosa operatione obtinendus; rem non ingratam facturum me existimavi, si ostenderem qua ratione id confici queat, quem ob finem, Theorema generale a me Regiæ Societati 6° *Junii* 1697 exhibitum, & actis Philosophicis Num. 230 insertum, huc transferendum censui.

THE-

THEOREMA.

Si Multinomium $a + bz + czz + dz^3 + ez^4$ *&c. ad poteſtatem quamlibet datam* n *ſit attollendum, erit poteſtas requiſita.*

$$
\begin{array}{llll}
a^n + na^{n-1}bz & + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bbzz & + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3z^3 \\
 & + na^{n-1}c & + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} a^{n-2}bc \\
 & & + n a^{n-1}d
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4z^4 & + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} a^{n-5}b^5z^5 \\
+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{1} a^{n-3}bbc & + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{1} a^{n-4}b^3c \\
+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} a^{n-2}bd & + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{1} a^{n-3}bbd \\
+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}cc & + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} a^{n-3}bcc \\
+ na^{n-1}e & + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} a^{n-2}be \\
 & + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} a^{n-2}cd \\
 & + na^{n-1}f
\end{array}
$$

&c.

Lex autem quam obſervat natura in formatione hujus poteſtatis duplex eſt, altera quæ producta literalia, altera quæ Coefficientes ſeu Uncias reſpicit.

De productis literalibus, id præſertim eſt obſervatu dignum exponentes in ſingulis productis eidem poteſtati indeterminatæ z annectendis, eandem ſemper conficere ſummam, quæ quidem ſumma ſemper æqualis eſt alteri cuidam ſummæ quæ colligitur ex additione indicis generalis n, & indicis ejus poteſtatis indeterminatæ z cui producta hæc literalia annectuntur.

Per Exponentes literarum intelligo numeros deſignantes ſedes illas quas in Serie naturali Literarum, ſingulæ literæ occupant, ſic exponens Literæ a eſt 1; Literæ b, 2; Literæ c, 3; & ſic deinceps, quo fit ut Exponens cujuſlibet poteſtatis Literæ a qualis a^p ſit p, Exponens cujuſlibet poteſtatis Literæ q qualis b^q ſit $2q$. Exponens cujuſlibet poteſtatis Literæ c qualis c^r ſit $3r$.

Jam cum poteſtas quælibet indeterminatæ z, ad intervallum quodlibet datum l a primo Seriei termino poſita ſit z^l, inde ſequitur producta omnia literalia poteſtati z^l annectenda, adeoque ad intervallum

vallum l ponenda, obtineri posse, si ita combinentur literæ ingredientes Multinomium datum, ut summa Exponentium in productis singulis semper evadat $n+l$, numerus vero Literarum sit n.

Quod coefficientes attinet, a nobis demonstratum fuit in *Actis Philosophicis* supra memoratis, nihil aliud iis designari quam numerus permutationum quas literæ productum constituentes subire possunt; Exempli gratia, si sumatur productum a^3bbc, Coefficiens ei præfigenda erit 60, ob id solummodo quod possint Literæ *aaabbc* ita variare sua loca ut numerus variationum seu permutationum quas subeant sit 60.

Regulam autem generalem tunc dedimus qua posset obtineri coefficiens cuilibet producto competens, exempli gratia producto $a^{n-p}b^q c^r d^s$, hanc nimirum: scribantur tot factores Seriei $n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}\times\overline{n-5}$ *&c.* quot sunt Unitates in summa Indicum q, r, s *&c.* hoc est in summa omnium, primo excepto; dividaturque productum ex his factoribus ortum, per productum aliud ortum ex continua multiplicatione serierum $1\times2\times3\times4$ *&c.* $1\times2\times3\times4$ *&c.* $1\times2\times3\times4$ *&c.* quarum prima contineat tot terminos quot sunt Unitates in q, secunda quot sunt Unitates in r, tertia quot sunt Unitates in s, & sic deinceps.

Demonstrabatur autem hæc Regula partim ex doctrina Combinationum, partim ex ratione inde desumpta quod summa Indicum $q+r+s$ *&c.* semper æqualis sit excessui quo Index generalis n, superat Indicem $n-p$ literæ a, hoc est quod sit $p=q+r+s$ *&c.* seu quod numerus Literarum unicuique producto competens semper æqualis sit numero n; litera qualibet bis vel ter repetita, seu ad potestatem secundam vel tertiam evecta, pro duabus vel tribus literis semper habita: & sic de cæteris.

Definita igitur fuerant producta omnia literalia, æque ad Coefficientes ipsis præfigendæ, termino cuilibet assignato adscribenda, subque eadem potestate indeterminatæ z ordinanda, idque absque ulla consideratione relationis quam terminus ille haberet ad terminos anteriores.

Non defuere viri clarissimi qui existimarint legem hanc Multinomii satis facile ex Binomio *Newtoniano* deduci posse, ponendo scilicet $bz+czz+dz^3$ *&c.* $=v$, tum attollendo $a+v$ ad potestatem datam, deinde scribendo pro v, vv, v^3, v^4, cæterisque potestatibus quantitatis v, earum valores; illud quidem fateor, potestatem datam ad terminum quemlibet cujus locus assignatur hac methodo perductum iri, sed, si res consideretur, vicissim fatendum erit, legem termini hac me-

methodo comparati, non inde perſpectam fore: terminus ille oculis quidem ſubjicietur, at vero natura ejus etiamnum erit ignota.

Iis vero quæ hactenus de Multinomio ad poteſtatem datam evecto, diximus, acceſſerat Regula qua producta literalia ex præcedentibus facile colligi poterant, hæc nimirum; multiplicentur per $\frac{b}{a}$ producta omnia literalia termino proxime antecedenti adſcripta; 2° multiplicentur per $\frac{c}{a}$ producta omnia literalia huic antecedenti anteriora, iis exceptis in quibus reperitur quantatis b; 3° multiplicentur per $\frac{d}{a}$ producta omnia literalia huic deinceps anteriora, iis exceptis in quibus reperiuntur b vel c, & ſic continue, tunc membra omnia, quæ ex præſcriptis multiplicationibus generantur, conficient producta literalia termini deſiderati.

COROLLARIUM I.

Si ponatur $n = -1$, & $a = 1$, tunc erit quotiens oriundus ex diviſione Unitatis per Multinomium $1 - bz - czz - dz^3$ &c. =

$$\begin{array}{lllllllll}
1 & +bz & +bbzz & +b^3z^3 & +b^4z^4 & +b^5z^5 & +b^6z^6 & +b^7z^7 & +b^8z^8 \\
 & & +c & +2bc & +3bbc & +4b^3c & +5b^4c & +6b^5c & +7b^6c \\
 & & & & +cc & +3bcc & +6bbcc & +10b^3cc & +15b^4cc \\
 & & & & & & +c^3 & +4bc^3 & +10bbc^3 \\
 & & & & & & & & +c^4 \\
 & & & +d & +2bd & +3bbd & +4b^3d & +5b^4d & +6b^5d \\
 & & & & & +2cd & +6bcd & +12bbcd & +20b^3cd \\
 & & & & & & & +3ccd & +12bccd \\
 & & & & & & +dd & +3bdd & +6bbdd \\
 & & & & & & & & +3cdd \\
 & & & & +e & +2be & +3bbe & +4b^3e & +5b^4e \\
 & & & & & & +2ce & +6bce & +12bbce \\
 & & & & & & & & +3cce \\
 & & & & & & & & +ee \\
 & & & & & +f \text{ \&c.} & & &
\end{array}$$

Regula autem Coefficientium ſic poterit enunciari.

Scribantur tot factores Seriei $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ &c. quot ſunt Unitates in eo producto cui Coefficiens eſt præfigenda, dividaturque factum

 per

per similes Series $1 \times 2 \times 3 \times 4$ &c. $1 \times 2 \times 3$ &c. 1×2 &c. quarum prima contineat tot factores quot sunt Unitates in indice literæ b; secunda tot contineat quot sunt Unitates in indice literæ c; tertia tot contineat quot sunt Unitates in indice literæ d, & sic deinceps quo usque exhauriantur literæ omnes.

COROLLARIUM II.

Si Exponentes literarum omnes Unitate minuantur, ita ut exponens literæ b evadat 1; literæ c, 2; literæ d, 3; & sic deinceps, tunc erit summa Exponentium in productis singulis sub eadem potestate z^l ordinandis, æqualis indici l hujus potestatis.

COROLLARIUM III.

Quapropter si in Quotiente oriundo ex Divisione Unitatis per Multinomium quodlibet, exempli gratia, Quadrinomium $1 - bz - czz - dz^3$, requirantur producta omnia literalia sub eadem potestate z^l ordinanda, ea obtineri poterunt ope Methodi qua solvuntur quæstiones de Numeris integris; etenim inventis tribus numeris x, y, z, quorum primus si multiplicetur per 1, secundus per 2, tertius per 3; producti numeri omnes, sive sigillatim sumpti, sive bini, sive terni, semper conficiant summam l, & convertantur valores integri quantitatum x, y, z, in respectivos indices quantitatum b, c, d, & pro summis quantitatum x, $2y$, $3z$, quoquo modo sumptis scribantur producta quantitatum respondentium cum indicibus suis propriis, producta hæc omnia simul sumpta ea ipsa erunt quæ requirebantur: & eodem modo procedere licet ad quinquinomium, si adhibeatur nova litera v per numerum 4 multiplicanda, & sic deinceps in infinitum.

DEFINITIONES.

Seriem eam nomino Binomialem, vel simpliciter Binomium quæ oritur ex divisione Unitatis per Binomium; eodem modo, Seriem eam nomino Trinomialem, vel simpliciter Trinomium quæ oritur ex divisione Unitatis per Trinomium, & sic de cæteris.

Seriem eam nomino Trinomii æmulam quæ conficitur ex binarum Serierum $1 + bz + bbzz + b^3z^3$ &c. & $1 + czz + ccz^4 + c^3z^6$ &c. mutuo ductu: eodem modo Seriem eam voco Quadrinomii æmulam quæ conficitur ex ternarum Seriorum $1 + bz + bbzz + b^3z^3$ &c.

$1 +$

$1 + czz + ccz^4 + c^3z^6$ &c. $1 + dz^3 + ddz^6 + d^3z^9$ &c. continuo ductu: ratio denominationis hinc desumitur quod producta literalia Seriei trinomialis, sint termini ipsi ejus Seriei quam voco Trinomii æmulam, & sic de reliquis.

COROLLARIUM IV.

Dato Binomio, facile invenientur producta omnia literalia sub potestate qualibet z^l in Trinomio ordinanda; etenim si multiplicentur producta illa literalia Binomii quæ potestatibus z^l, z^{l-2}, z^{l-4}, z^{l-6} &c. adscribuntur, ordinatim per 1, c, cc, c^3 &c. producta hæc simul sumpta conficient producta desiderata.

Eodem modo, dato Trinomio, vel Serie Trinomii æmula, facile invenientur producta omnia sub eadem potestate z^l in Quadrinomio ordinanda; etenim si multiplicentur producta illa literalia Trinomii, vel Seriei Trinomii æmulæ, quæ potestatibus z^l, z^{l-3}, z^{l-6}, z^{l-9} adscripta sunt, per 1, d, dd, d^3 &c. ordinatim, obtinebuntur producta desiderata; eadem vero est ratio reliquorum.

COROLLARIUM V.

Hinc numerus productorum sub eadem potestate z^l Multinomii cujuscunque ordinandorum facile invenietur.

COROLLARIUM VI.

Ex iis quæ hactenus diximus, illud satis facile colligitur, Coefficientes cuilibet producto Trinomii apponendas, ex Coefficientibus Binomii ad intervalla quæque bina positis deduci posse, & eodem modo posse deduci Coefficientes Quadrinomii ex Coefficientibus Trinomii ad Intervalla quæque terna positis, & sic deinceps; possunt itaque Coefficientes cuilibet producto apponendæ in Multinomio quolibet dato dupliciter obtineri, vel ex producto ipso, vel ex Coefficientibus producti cujusdam in Multinomio uno gradu inferiore reperiendi.



CAPUT III.

De Pseudo-trinomio.

SI dividatur Unitas per quantitatem quamlibet ex tribus terminis constantem qualem $1-bz^f-cz^n$, habueritque n ad f eam rationem quæ binarii ad Unitatem, Series ex hac divisione oriunda ad Trinomium refertur, sin vero n habuerit ad f quamlibet aliam rationem, series inde oriunda nuncupari poterit Pseudo-trinomium, eo quod ea strictè loquendo non sit Trinomialis, sed Multinomialis quædam altioris gradus: jam vero ut dignoscatur ad quoddam Multinomii genus Series ea sit revocanda, inveniatur d maxima communis mensura quantitatum n & f, tum ponatur $\frac{n+d}{d}=m$, hinc fiet ut quantitas m designatura sit illud Multinomii genus quod requirebatur; ita ut si fuerit $m=4$ vel $=5$, Multinomium, pro ut unum vel alterum acciderit, Quadrinomii vel Quinquinomii Denominationem sortiturum sit.

Aliquando ita evenit ut Multinomium ex plurimis partibus constans ad Pseudo-trinomium revocari possit; quo in casu, si terminus aliquis Multinomii desideretur, is facile obtineri poterit; Exempli gratia si Multinomium oriatur ex divisione Unitatis per $1-z-zz-z^3 \ldots\ldots\ldots -z^{n-1}$, quoniam series $z+zz+z^3 \ldots\ldots\ldots +z^{n-1}$, æquipollet fractioni $\frac{z-z^n}{1-z}$, sequitur Divisorem $1-z-zz-z^3 \ldots\ldots -z^{n-1}$, æqalem esse quantitati $\frac{1-2z+z^n}{1-z}$, adeoque Multinomium supra memoratum generari potuisse ex divisione quantitatis $1-z$ per quantitatem $1-2z+z^n$.

Jam vero si terminus quilibet seriei ex hac divisione oriundæ requiratur, vel generalius, seriei oriundæ ex divisione quantitatis $1-z$ per $1-2bz+cz^n$, is facile ex superius dictis elicietur, etenim posito l intervallo inter primum terminum & terminum requisitum, erit terminus requisitus,

$+A=$

$+ A = - b^l z^l$

$- B = - - - - - - - - - - - - - - - - - - \overline{l-n+1} \times b^{l-n} c$

$+ C = - - - - - - - - - + \frac{\overline{l-2n+1}}{1} \times \frac{\overline{l-2n+2}}{2} \times b^{l-2n} cc$

$- D = - - - - - - \frac{\overline{l-3n+1}}{1} \times \frac{\overline{l-3n+2}}{2} \times \frac{\overline{l-3n+3}}{3} \times b^{l-3n} c^3$

&c. &c.

$- a = - b^{l-1} z^l$

$+ b = - - - - - - - - - - - - - - - - - + \overline{l-n} \times b^{l-1-n} c$

$- c = - - - - - - - - - - - - - \frac{\overline{l-2n}}{1} \times \frac{\overline{l-2n+1}}{2} \times b^{l-1-2n} cc$

$+ d = - - - - - - + \frac{\overline{l-3n}}{1} \times \frac{\overline{l-3n+1}}{2} \times \frac{\overline{l-3n+2}}{3} \times b^{l-1-3n} c^3$

&c. &c.

ubi animadvertendum est terminum assignatum ex duplici serie conflari, altera quæ priorem Numeratoris partem, altera quæ posteriorem respicit.

Huc referri potest Theorema pulcherrimum Clarissimi viri *Nic. Bernoulli, Actis Philosophicis* N°. 341. insertum, quo exhibetur Terminus quivis seriei cujusdam fractionum quarum prima sit $\frac{1}{2^{n-1}}$, sequentes vero sic constituantur ut earum Denominatores crescant in proportione dupla, Numeratores autem sint summæ tot Numeratorum proxime antecedentium quot sunt Unitates in $n-1$; hujus generis est subjecta series.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{5}{64} + \frac{8}{128} + \frac{13}{256}$ &c. vel hæc

$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{2}{32} + \frac{4}{64} + \frac{7}{128} + \frac{13}{256} + \frac{24}{512}$ &c.

in quarum priore est $n=3$, in posteriore vero $n=4$.

In serie quacunque juxta legem memoratam confecta, invenit Vir Cl. terminum quemvis, cujus locus designatur per numerum p, primo excepto, sic exprimi posse.

$$\frac{1}{2^n}$$

$$-\frac{p-n+1}{1\times 2^{2n}}$$

$$+\frac{\overline{p-2n}\times\overline{p-2n+3}}{1\times 2\times 2^{3n}}$$

$$-\frac{\overline{p-3n}\times\overline{p-3n+1}\times\overline{p-3n+5}}{1\times 2\times 3\times 2^{4n}}$$

$$+\frac{\overline{p-4n}\times\overline{p-4n+1}\times\overline{p-4n+2}\times\overline{p-4n+7}}{1\times 2\times 3\times 4\times 2^{5n}}$$

— &c.

Invenit præterea ſummam terminorum omnium eſſe

$$\frac{p+1}{1\times 2^n}-\frac{\overline{p-n}\times\overline{p-n+3}}{1\times 2\times 2^{2n}}+\frac{\overline{p-2n}\times\overline{p-2n+1}\times\overline{p-2n+5}}{1\times 2\times 3\times 2^{3n}}$$

$$-\frac{\overline{p-3n}\times\overline{p-3n+1}\times\overline{p-3n+2}\times\overline{p-3n+7}}{1\times 2\times 3\times 4\times 2^{4n}}+\ \&c.$$

Eruditiſſimus Autor harum Serierum in Epiſtola ad Cl. *Monmort* ſcripta, demonſtrationem indicavit his verbis: facile invenietur demonſtratio harum formularum, fingendo Numeratorem termini cujuſcunque ſummam eſſe omnium antecedentium, cum revera ſit tantummodo ſumma tot antecedentium quot ſunt Unitates in $n-1$, tum ſubtrahendo quicquid debito majus hac ratione collectum fuerit. Jam vero cum hæc verba illud prima fronte innuere videantur exceſſum ex regula præſcripta oriundum, ſimul & ſemel reſecandum eſſe, quod prorſus a mente Cl. Viri alienum foret, non abs re facturum me arbitratus ſum, ſi uno exemplo oſtenderem quo ſenſu verba prædicta ſint accipienda. Sit igitur Series

$\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\frac{2}{16}+\frac{3}{32}+\frac{5}{64}+\frac{8}{128}+\frac{13}{256}+\frac{21}{512}+\frac{34}{1024}$ &c. cujus Denominatores creſcant in propoſitione dupla, Numeratores vero ſint ſummæ binorum antecedentium; finge Numeratores ſingulos eſſe ſummas omnium antecedentium, tunc Series evadet

$$\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\frac{2}{16}+\frac{4}{32}+\frac{8}{64}+\frac{16}{128}+\frac{32}{256}+\frac{64}{512}+\frac{128}{1024}\ \&c.$$

ſive $\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ &c.

quæ cum juſto major ſit, ſcribatur Series

$- - - - \frac{2}{64} - \frac{3}{64} - \frac{4}{64} - \frac{5}{64} - \frac{6}{64} - \frac{7}{64}$ &c.

cujus Numeratores sint summæ Numeratorum præcedentis Seriei primo suo termino multatæ; porro cum hæc series magis quam par sit excessui antecedentis Seriei adimat, addatur Series

$- - - - - - - - \frac{2}{512} + \frac{5}{512} + \frac{9}{512}$ &c.

cujus Numeratores sint summæ omnium Numeratorum præcedentium Seriei proxime anterioris, & sic deinceps scribantur Series eodem modo confectæ, alternatimque negativæ & affirmativæ; & eadem est ratio omnium hujus generis Serierum quæ sub ea limitatione cadunt quam descripsit Vir Clarissimus.

Quod summas attinet, nihil est quod eæ lectorem morentur, etenim cum in singulis his Seriebus, Denominatores terminorum sint æquales, Numeratores vero constent ex terminis quorum ultimæ differentiæ evadunt tandem æquales, quod faciendum superest ut summæ obtineantur, facile ex Methodo Differentiarum elicietur.

Illud observari potest, quod si in expressione qua designavimus terminum Seriei trinomialis natæ ex divisione quantitatis $1-z$ per $1-bz+cz^n$, loco quantitatum b, z, c, l, substituantur ordinatim, 2, $\frac{1}{2}$, 1, $p-1$, tunc Fractio $\frac{A-a-B+b+C-c-D+d}{2^{n-1}}$ &c. exhibebit terminum desideratum, eo prorsus modo quo exhibitus fuit a Doctissimo Viro.

LIBER



LIBER V.

De Binomio a+b *ad Poteſtatem permagnam evecto.*

CAPUT I.

CEleberrimus Vir *Jacobus Bernoulli*, in eximio ſuo Tractatu *de Arte conjectandi*, cum id ſibi inquirendum conſtituiſſet, quantopere in rebus humanis, experimentis fidendum ſit; in hanc devenit quæſtionem, utrum ex repetitis experimentis ita continuo augeatur probabilitas aſſequendæ rationis inter numeros caſuum quibus Eventus aliquis contingere, & quibus non-contingere poſſit, ut probabilitas hæc tandem datum quemvis certitudinis gradum ſuperet.

Ut mentem ſuam melius patefaciat, ſequentia præmittit: ‘ pono ‘ in Urna quadam te inſcio reconditos eſſe ter mille calculos al‑ ‘ bos, & bis mille nigros, teque eorum numerum experimentis ex‑ ‘ ploraturum educere calculum unum poſt alterum (reponendo ‘ tamen ſingulis vicibus illum quem eduxiſti, priuſquam ſequen‑ ‘ tem eligas ne numerus calculorum in Urna minuatur) & obſervare ‘ quoties albus, & quoties ater exeat. Quæritur utrum toties hoc ‘ facere poſſis, ut decuplo, centuplo, millecuplo *&c.* probabilius ‘ fiat (hoc eſt ut moraliter tandem certum evadat,) numeros vicium ‘ quibus album, & quibus nigrum eligis, eandem rationem ſeſqui‑ ‘ alteram qua ipſi calculorum ſeu caſuum numeri gaudent, in‑ ‘ ter ſe habituros quam aliam quamlibet rationem ab iſta diver‑ ‘ ſam *&c.*

‘ Probe notandum eſt quod rationem inter numeros caſuum, ‘ quam experimentis determinare aggredimur; non præciſe & in

‘ indi‑

'indivisibile acceptam velim (sic enim contrarium prorsus eveniret, 'eoque minus probabile fieret, veram rationem inventam esse, quo 'plures caperentur observationes) verum rationem in aliqua latitu-'dine sumptam, id est binis limitibus conclusam, sed qui tam arcti 'constitui possunt quam quis voluerit. Nimirum si in Exemplo 'calculorum modo allato, duas rationes assumamus $\frac{301}{300}$, & $\frac{299}{300}$, vel '$\frac{3001}{3000}$ & $\frac{2999}{3000}$ &c. quarum una proxime major, altera proxime mi-'nor est sesquialtera, ostendetur quod quavis probabilitate probabili-'us fieri possit, rationem per Experimenta crebro repetita inventam 'intra hos limites rationis sesquialteræ quam extra casuram esse.

Quibus positis, Vir Clarissimus ad investigationem se accingit, quam cum æque feliciter ac raro ingenii acumine absolvisset, sic demum concludit,

'Sit $\frac{r}{s}$ ratio casuum data, $\frac{r+1}{s}$, & $\frac{r-1}{s}$ limites rationis, (facto '$r+s=t$). Jam cum per se pateat quod quo majores in eadem ra-'tione assumuntur numeri r, s, t, eo arctius quoque constringi pos-'sunt limites $\frac{r+1}{t}$, & $\frac{r-1}{t}$, idcirco si ratio inter numeros casuum $\frac{r}{s}$ 'per experimenta determinanda sit, exempli gratia sesquialtera, pro 'r & s non pono 3 & 2, sed 30 vel 20, sufficiat posuisse $r=30$, '$s=20$, & $t=r+s=50$, ut limites fiant $\frac{r+1}{t}=\frac{31}{50}$ & $\frac{r-1}{t}=\frac{29}{50}$; '& statuatur insuper $m=\frac{log.\ c\times\overline{s-1}}{log.\ \overline{r+1}-log.\ r}$, atque $p=\frac{log.\ c\times\overline{r-1}}{log.\ \overline{s+1}-log.\ s}$. 'sumatur major quantitatum $mt+\frac{mst-st}{r+1}=24728$, & $pt+\frac{prt-rt}{s+1}$ '$=25550$, & per demonstrata infertur*, quod institutis 25550 expe-'rimentis, multo plus millies verisimilius sit, rationem quam numerus 'calculorum alborum obtinebit ad numerum omnium, intra limites '$\frac{31}{50}$, $\frac{29}{50}$ casuram quam extra. Atque eodem modo posita $c=10000$ aut '$c=100000$ &c. cognoscetur, idem plus decies millies probabilius

* Vide Librum *De Arte Conjectandi*, a Pag. 223 usque ad 239, ubi proprietates quædam Binomii ad potestatem permagnam evecti exquiruntur.

O 'fo-

'fore, si fiant experimenta 31258; & plusquam centris millies si capiantur 36966 *&c.* & sic porro in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis.

Clarissimus Vir *Nicolaus Bernoulli* paulo aliter argumentum illud pertractavit; is enim non inquirit quanta copia experimentorum requiratur ad determinandum eum probabilitatis gradum quo quis possit affirmare, futurum fore data quavis probabilitate probabilius, ut contingentia & non-contingentia intra limites assignatos consistant quam quod ultra divagentur: sed ex dato experimentorum numero id suscipit determinandum, quanto probabilius futurum sit ut eventus de quo agitur neque frequentius se proferat, neque rarius, quam secundum rationem quamlibet assignatam. Ut vero mens Cl. Viri melius innotescat, exemplum ab ipso allatum huc transferendum censui.

Assumit experimenta $14000 = n$. Facilitates contingentiæ & non-contingentiæ in singulis experimentis ponit ut 18 ad 17, ceu generaliter ut m ad f, cumque sit 14000 multiplex summæ $18 + 17$ in ea ratione quam habet 40 ad 1, ponit $p = 40$, unde erit $mp = 7200$, & $fp = 6800$: limes l assignatur 163: jam id sibi proponit inquirendum quam probabile sit ut eventus de quo agitur neque frequentius se proferat quam $mp + l$ vices, neque rarius quam $mp - l$.

Quod ut assequatur, observat Autor fere ut si Binomium $m + f$ ad potestatem n seu $mp + mf$ attollatur, Indices quantitatum m & f, in illo potestatis termino cujus locus designari potest per $k + 1$, futuri sint $n - k$ & k respective, ita ut si fuerit A Coefficiens istius termini, quantitas $Am^{n-k}f^{k}$ designatura sit illum casuum numerum quibus eventus toties se proferre possit, & toties se subducere, quoties Unitas reperitur in indicibus $n - k$ & k ordine sumptis. Hoc posito, id ulterius inquirit quam rationem habiturus sit is terminus cujus locus est $fp + 1$, ad eum terminum cujus locus est $fp - l + 1$, deinde quam rationem habiturus sit terminus idem $fp + 1$ ad terminum $fp + l + 1$; binarum harum rationum ponit minorem $= q$; tum demonstrat terminos omnes Binomii inclusos intra sedes designatas per $fp - l + 1$, & $fp + l + 1$, multo majorem habituros rationem ad terminos omnes extra has sedes positos, quam quantitas $q - 1$ habeat ad 1.

Jam ut obtineat quantitatem q, convertit Vir Cl. progressionem quandam Arithmeticam ex Binomii formatione depromptam in geometricam alteram, quod sibi licitum esse sumit, præsertim si fuerit n maximus numerus, quo facto devenit gradatim ad binas quantitates

$$\frac{fp - l}{mp - l + 1}$$

$\overline{\frac{mp+l}{fp-l+1}\times\frac{mp+1}{mp}\times\frac{fp}{mp}}\big|^{\frac{1}{2}l}$, & $\overline{\frac{fp+l}{mp-l+1}\times\frac{fp+1}{fp}\times\frac{mp}{fp}}\big|^{\frac{1}{2}l}$, quæ ſunt eæ ipſæ quantitates, minori quarum æquanda eſt quantitas q.

In ſpeciali applicatione ad numeros, poſitis ut prius $n=14000$, $mp=72000$, $fp=6800$, invenit priorem harum quantitatum $= 44\frac{74}{100}$, poſteriorem vero $= 44\frac{48}{100}$, cui utpote minori ponit q æqualem, ideoque $q-1=43\frac{48}{100}$, unde demum concludit fore ut ſi fiant experimenta 14000, probabilius futurum ſit ad minimum in ea ratione quam habet $43\frac{48}{100}$ ad 1, eventum illum cujus contingentia in ſingulis experimentis eſt ad non-contingentiam ut 18 ad 17, neque ſæpius ſe oſtenſurum quam 7363 vices, neque rarius quam 7037.

CAPUT II.

CUM aliquando labente Anno 1721, Vir Clariſſimus *Alex. Cuming* Eq. Au. Regiæ Societatis Socius, quæſtionem infra ſubjectam mihi propoſuiſſet, ſolutionem problematis ei poſtero die tradideram.

PROBLEMA I.

Colluſores duo A *&* B *quorum dexteritates ponantur æquales, ſpectatori cuidam ita ſe obſtringant, ut poſt elapſum numerum* n *ludorum parem, uter victorem ſe præſtiterit, is ei tot nummos largiturus ſit quot plures ludos vicerit quam qui deſignentur per* $\frac{1}{2}n$; *quæritur quanti æſtimanda ſit Expectatio Spectatoris.*

SOLUTIO.

Denotet E medium terminum Binomii $a+b$ ad poteſtatem n evecti, poſitis ſigillatim a & $b=1$. tunc erit $\frac{\frac{1}{2}nE}{2^n}$, Expectatio quæſita.

INVESTIGATIO.

Sit E terminus medius, seu potius Coefficiens termini medii potestatis $\overline{a+b}|^{n}$, D & F Coefficientes terminorum hinc inde medio proxime adstantium, C & G Coefficientes terminorum binis intervallis a medio distantium, & sic deinceps pergendo utrinque a medio ad utrumque extremorum.

Jam ex formatione Binomii, palam est terminum medium eos casus designaturum quibus accidere possit, ut neuter Collusorum alteri præpolleat, terminos huic proxime adstantes eos casus designaturos quibus possit evenire, ut alter alterum sit superaturus ludis binis, seu ut eorum alter numerum $\frac{1}{2}n$ sit superaturus ludo uno; terminos his deinde proximos designaturos hos casus quibus accidere possit, ut eorum alter alterum sit superaturus ludis quaternis, seu ut numerum $\frac{1}{2}n$ superaturus sit ludis binis, & sic deinceps progrediendo ad terminos extremos.

Erit igitur Expectatio spectatoris in ludorum numero pari $= E\times 0 + \overline{D+F}\times 1 + \overline{C+G}\times 2 + \overline{B+H}\times 3 + \overline{A+K}\times 4$ &c. sive propter Æqualitatem Coefficientium hinc inde a Medio æqualiter distantium, erit Expectatio spectatoris $= E\times 0 + 2D + 4C + 6B + 8A$ &c.

Sed ex Proprietate Coefficientium, invenietur esse

$$\overline{n+2}\times D = nE$$
$$\overline{n+4}\times C = \overline{n-2}\times D$$
$$\overline{n+6}\times B = \overline{n-4}\times C$$
$$\overline{n+8}\times A = \overline{n-6}\times B$$
$$\overline{n+10}\times 0 = \overline{n-8}\times A$$
&c. &c.

Jam cum summa prioris Columnæ æqualis sit summæ posterioris, erit

$$\begin{matrix} nD + nC + nB + nA \\ + 2D + 4C + 6B + 8A \end{matrix} \text{ \&c.} = \begin{matrix} nE + nD + nC + nB + nA \\ - 2D - 4C - 6B - 8A \end{matrix} \text{ \&c.}$$

tum deletis hinc inde terminis æqualibus, cæterisque ad eandem partem transpositis, fiet

4D

$$4D+8C+12B+16A \text{ \&c.} = E, \text{ seu}$$
$$2D+4C+6B+8A \text{ \&c.} = \tfrac{1}{2}nE.$$

Erit igitur Expectatio Spectatoris, in ludorum numero pari $= \frac{\frac{1}{2}nE}{2^n}$, qualis a nobis fuerat determinata.

COROLLARIUM.

Quo plures ludi transiguntur, eo pluris valet sors spectatoris; attamen eo propius ludi quibus *A* vincit *B*, & ludi quibus *B* vincit *A* ad rationem æqualitatis accedunt.

Eodem procedendi modo, solutum fuerat Problema sequens ab eodem Cl. viro etiam propositum, ejusdem generis ac superius sed multo latius patens.

PROBLEMA II.

Collusores duo A *&* B *quorum dexteritates sint in ratione data* a *ad* b, *spectatori cuidam ita se obstringant, ut post conclusum quemlibet ludorum numerum* n *quem* a+b *metitur,* A *sit ei tot nummos largiturus quot ipse plures ludos vicerit quam qui designentur per* $\frac{a}{a+b}$n: *similiter* B *sit ei largiturus tot nummos quot ipse plures ludos vicerit quam qui designentur per* $\frac{b}{a+b}$n, *quæritur sors spectatoris.*

SOLUTIO.

Designet *E* terminus ille Binomii $a+b$ ad potestatem n evecti, in quo indices quantitatum *a* & *b* eam rationem inter se habeant quæ est *a* ad *b*, sit *p* index quantitatis *a*, *q* index quantitatis *b*; quibus positis, sors spectatoris ab utroque Collusorum oriunda, recte designabitur per $\frac{2pq}{n \times \overline{a+b}|^n} E$, vel ab eorum utrolibet per $\frac{pq}{n \times \overline{a+b}|^n} E$.

COROLLARIUM.

Quò plures ludi transiguntur, eò pluris sors spectatoris valet, attamen eò propius ludi quibus *A* vincit *B*, & ludi quibus *B* vincit *A*, ad rationem *a* ad *b* accedunt.

Jam

Jam vero cum Terminus medius Binomii ad poteſtatem parem evecti tot factores $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ &c. requirat quot ſunt Unitates in $\frac{1}{2}n$, patet terminum illum in poteſtate permagna, qualis foret 10000, methodo vulgari obtineri non poſſe niſi labore prope immenſo, ne dicam impoſſibili.

Quam ob cauſam, cum a me quæſiviſſet vir ſupra laudatus, num poſſem methodum aliquam excogitare qua terminum illum aſſequi liceret citra moleſtiam multiplicationis, vel quod eòdem fore recideret, additionis Logarithmorum, reſpondi me ſi libuiſſet coram ipſo tentaturum quid in hac re præſtare poſſem, quanquam non mihi quidem ſuppeteret magna ſpes ſucceſſus, cui cum ille aſſenſus eſſet, ad opus me contuli quod, intra ſpatium unius circiter horæ, eò perduxi ut potuerim ſolutionem ſequentis Problematis prope elicere.

PROBLEMA III.

Invenire Coefficientem Termini medii poteſtatis permagnæ & paris, ſeu invenire rationem quam Coefficiens termini medii habeat ad ſummam omnium Coefficientium.

SOLUTIO.

Sit n Index poteſtatis ad quam Binomium $a+b$ attollitur, tunc erit, poſitis a & b ſigillatim $= 1$, ratio Termini medii ad poteſtatem ipſam $\overline{a+b}|^{n}$ ſeu 2^{n}, ut $\frac{2 \times \overline{n-1}|^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n}}$ ad 1 prope.

Sed cum quædam Series quibus Quæſtio poterat accuratius determinari, ob temporis anguſtiam neglectæ fuerant, calculo poſtea redintregato, quantitates præcipuas prius neglectas in uſum reſumpſi, quo factum eſt ut mihi demum concludere liceret, rationem quæſitam eſſe $\frac{2\frac{21}{125} \times \overline{n-1}|^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n}}$, ſeu $\frac{2\frac{21}{125} \times \overline{1-\frac{1}{n}}|^{n}}{\sqrt{n-1}}$ ad 1 proxime.

PROBLEMA IV.

In Poteſtate permagna & pari, invenire rationem Coefficientis Termini medii ad Coefficientem Termini diſtantis a medio, Intervallo dato p.

SO-

SOLUTIO.

Sit M Coefficiens Termini medii, Q Coefficiens Termini diſtantis a medio intervallo dato p ſit n index poteſtatis; pone $n=2m$ tunc erit

$$\frac{M}{Q} = \frac{\overline{m+p-1}|^{m+p-\frac{1}{2}} \times \overline{m-p+1}|^{m-p+\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{m+p}{m}}}{m^{2m}}.$$

Comparavi mihi Tabulam exhibentem denas quaſque ſummas novies Centenorum Logarithmorum, ad quatuordecim loca decimalium computatam, ex qua mihi conſtat me poſſe, in magna qualibet poteſtate, per ſuperiorem Canonem, invenire rationem Termini medii, ad Terminum quemlibet diſtantem a medio per intervallum haud ita magnum, ad ſex aut ſeptem loca Decimalium, & rationem termini medii ad terminum diſtantem ab ipſo per intervallum quantumvis magnum, ad tria vel ſaltem duo loca Decimalium.

Tabula Summarum Logarithmica.

10	6.55977303287678	230	444.88979205416048
20	18.38613461687770	240	468.60937810834794
30	32.42367007492572	250	492.50959579816190
40	47.91165506815591	260	516.58323038531269
50	64.48308487247209	270	540.82362146345295
60	81.92018484939024	280	565.22460144971654
70	100.07841503568004	290	589 78044277179860
80	118.85473712249966	300	614.48581244647387
90	138.17194519001086	310	639.33573262820106
100	157.97001305471585	320	664.32554627685328
110	178.20092704487008	330	689.45088710873828
120	198 82540324721977	340	714.70765318735691
130	219.81070255614815	350	740.09198361893279
140	241.12911938869689	360	765.60023790941998
150	262.75690281092616	370	791.22897761354658
160	284.67346564068298	380	816.97494996633600
170	306.66079139482847	390	842.83307323640306
180	329.30298082389393	400	868.80642358042588
190	351.98589913663535	410	894.88622321121630
200	374.89689804274044	420	921.07181971935465
210	398.02459201763614	430	947.36072641107526
220	421.35867894483259	440	973.75051354434285

450	1000.23890036109930	680	763.79479638119554
460	1026.82369782727267	690	792.15483284830559
470	1053.50281200366230	700	820.57776715588503
480	1080.27423798062506	710	849.06270134357546
490	1107.13605431786673	720	877.60876273040337
500	1134.08641793783508	730	906.21510286206569
* 510	292.31713584693335	740	934.88089651586875
520	319.43935512714182	750	963.60534057942556
530	346.64501745623663	760	992.38765387953067
540	373.93254973375792	770	1021.22707525791203
550	401.30043707843343	780	1050.12286349081808
560	428.74721965475621	790	1079.07429634963075
570	456.27148972609533	800	1108.08066987990954
580	483.87188891447903	810	1137.14129771646564
590	511.54710564924395	820	1166.25551043224295
600	539.29587278855310	830	1195.42265491894594
610	567.11696539938536	840	1224.64209379750205
620	595.00919868301335	850	1253.91320485658439
630	622.97142603424363	860	1283.23538051754425
640	651.00253722380840	870	1312.60802732421889
650	679.10145669429300	880	1342.03056545618557
660	707.26714196086952	890	1371.50242826413045
670	735.49858210890182	900	1401.02306182608989

Usus autem hujus Tabulæ talis est, ut si requiratur Coefficiens medii Termini potestatis cujuslibet paris, non superantis 900 eam assequi licebit facillime.

Etenim posito n Indice potestatis datæ, sumatur summa logarithmica numerum n respiciens, tunc ex ea summa subtrahatur dupla summa respondens numero $\frac{1}{2}n$, residua summa erit logarithmus Coefficientis medii Termini. Exempli gratia si sit $n = 900$.

Summa logarithmica numero n respondens, erit	1401.0230618260
cui si addatur ex præscripto - - -	868.8064235804
Summa erit	2269.8294854064

e qua si subtrahatur dupla summa numero $\frac{1}{2}n$ respondens *viz.*

2000.4778007220

*NB. Ad summas quæ respiciunt majores numeros quam 500, adde perpetuo 868.80642358042588.

relin-

relinquetur logarithmus termini medii = 269.3516846844
e quo si iterum subtrahatur log. quantitatis 2^{900} = 270.9269960400

quod superest nimirum $\bar{8}.4246886444$

erit logarithmus rationis Termini medii ad summam omnium terminorum, quæ proinde erit 0.026588 prope.

Experiri jam licet num eadem Conclusio prope deduci possit ex Formula $\dfrac{2\frac{21}{125}\times\overline{n-1}|^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$, ad hunc modum

Log. $n-1$ =	2.9537596917
qui multiplicatus per $n-\frac{1}{2}$ =	$900-\frac{1}{2}$
productus logarithmus erit =	2.658.3837225300
	— 1.4768798458
est igitur logarithmus $\overline{n-1}|^{n-\frac{1}{2}}$ =	2656.9068426842
sed Logarithmus $2\frac{21}{125}$ =	0.3360592778
Quapropter logarithmus $2\frac{21}{125}\times\overline{n-1}|^{n-\frac{1}{2}}$ =	2657.2429019620
sed log. . . . . n^n =	2658.8282584600
adeoque log. $\dfrac{2\frac{21}{125}\times\overline{n-1}|^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$ =	$\bar{8}.4246435020$

cui respondet numerus 0.026585 qui ex Tabula prodierat 0.026588.

Ut inveniatur ope Tabulæ nostræ Coefficiens termini distantis a medio in potestate non superante 900, id perficietur ad hunc modum.

Addantur in unum summæ logarithmicæ respondentes numeris $\frac{1}{2}n+p$, & $\frac{1}{2}n-p$, subducaturque aggregatum ex summa logarithmica numero n adscripta, quo facto obtinebitur logarithmus Termini quæsiti.

Jam vero, si subtrahatur logarithmus modo obtentus e logarithmo termini medii, residuus erit logarithmus rationis termini medii ad terminum illum cujus distantia a medio designatur per p. Exempli gratia, si ponatur $n=900$, $p=30$; erit $\frac{1}{2}n+p=480$, & $\frac{1}{2}n-p=420$.

P Summa

Summa respondens numero 480 = 1080.2742379806
Summa resp. num. 420 = 921.0718297193

Aggregatum = 2901.3460676999
quo subtracto ex numero 900 adscripto = 2269.8294854064

residua summa erit log. termini quæsiti = 268.4834177065
quâ subtractâ ex log. termini medii = 269.3516846844

residuus erit log. rationis quæsitæ = $\overline{0}$.8682669779
unde ratio quæsita erit ut 7.38358 ad 1 proxime.

Jam experiamur an Logarithmus hujus rationis propre eliciatur ex formula $\frac{\overline{m+p-1}|^{m+p-\frac{1}{2}} \times \overline{m-p+1}|^{m-p+\frac{1}{2}} \times \frac{m+p}{m}}{m^{2m}}$.

Log. $m+p-1 =$ 2.6803355134
$m+p-\frac{1}{2} =$ $480-\frac{1}{2}$

Log. $\overline{m+p-1}|^{m+p-\frac{1}{2}} =$ 1285.2208786753 =

Log $m-p+1 =$ 2.6242820958
$m-p+\frac{1}{2} =$ $420+\frac{1}{2}$

Log. $\overline{m-p+1}|^{m-p+\frac{1}{2}} =$ 1103.5106212839
Log. $\frac{m+p}{m}$ = 0.0280287236

Erit igitur log. Numeratoris = 2388.7595286828
e quo si subt. log. Denomin. = 2387.8912624200
$= m^{2m}$

relinquitur log. rationis desideratæ 0.8682662628
qui ex Tabula Logarithmica prodierat 0.8682669779

CAPUT

CAPUT III.

De Maximo Termino Binomii a+b *ad Potestatem integram evecti, posita ratione* a *ad* b *inaequalitatis.*

ILlud notum est quod si Binomium $a+b$ ad potestatem n attollatur, terminus quilibet cujus locus est l, designabitur per quantitatem $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ - - - - - - - - - - $a^{n-l+1}b^{l-1}$ cujus Coefficiens ad tot factores continuatur quot sunt Unitates in $l-1$.

Quamobrem si M denotaverit terminum illum cujus locus est l, terminus ei proximus versus Binomii principium erit $\frac{l-1}{n-l+2} M \times \frac{a}{b}$, terminus vero ab altera parte ei proximus erit $\frac{n-l+1}{l} \times M \times \frac{b}{a}$: jam vero ex eo quod sit M major termino utrovis sibi proximo, erit $1 > \frac{l-1}{n-l+2} \times \frac{a}{b}$, erit itidem $1 < \frac{n-l+l}{l} \times \frac{b}{a}$, unde id necessario sequitur fore ut l constiterit intra quantitates $\frac{nb+2b+a}{a+b}$, & $\frac{nb+b}{a+b}$; atqui quantitas $\frac{nb+b+a}{a+b}$, inter hasce duas consistit, adeoque si ponatur esse n multiplex summae $a+b$, ita ut sit $n = \overline{a+b} \times s$ erit $sb+1$ quantitas designans locum maximi termini; hanc vero conclusionem Cl. *Jacobus Bernoulli* in libro suo *de Arte conjectandi* via aliquanto huic dissimili invenerat.

Propter eandem rationem, si fuerit $n-1$, multiplex summae $a+b$, ita ut sit $n-1 = \overline{a+b} \times s$, erit $\frac{nb+a}{a+b}$, sive $sb+1$ quantitas designans locum maximi termini.

Sive fuerit n, aut $n-1$ multiplex summae $a+b$, sive non fuerit, datur nihilominus terminus maximus in Binomio $\overline{a+b}|^n$, ille scilicet terminus unicus, cujus locus in integris cadit intra quantitates $\frac{nb+2b+a}{a+b}$ & $\frac{nb+b}{a+b}$, at vero si nullus ceciderit integer intra has

quan-

quantitates, ipsæ erunt integræ; adeoque termini quorum loca his quantitatibus designantur ambo erunt maximi, proindeque æquales; has autem conclusiones Vir Cl. supra laudatus non memorat, utpote quæ ad scopum suum non pertinerent.

Ex quo illud fit ut si fuerit n numerus par, deturque idcirco terminus medius in potestate $\overline{a+b}|^n$, fuerit etiam n multiplex summæ $a+b$ juxta quantitatem quandam s, denotetque P Coefficientem termini maximi, terminus ille maximus futurus sit $Pa^{as}b^{bs}$: erunt igitur indices quantitatum a & b in illo termino directe ut quantitates ipsæ.

Si ponantur esse M Coefficiens termini medii, erit terminus ipse medius $= Ma^{\frac{1}{2}n}b^{\frac{1}{2}n}$, quapropter facto $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = d$, erit ratio termini medii ad maximum ut Mb^{ds} ad Pa^{ds}.

Ex eo quod sit demonstratum locum termini maximi designatum iri per $bs+1$, sequitur intervallum inter primum terminum & terminum maximum fore bs; jam cum sit n numerus par ex Hypothesi, erit numerus terminorum omnium in Binomio $= n+1$, adeoque numerus intervallorum a primo ad ultimum $= n$, erit itaque $\frac{1}{2}n$ intervallum inter terminum primum & terminum medium, & $\frac{1}{2}n - bs$ intervallum inter terminum medium & terminum maximum, sed est $n = as + bs$ erit, igitur illud intervallum $= \frac{1}{2}as - \frac{1}{2}bs$, sive propter $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = d$, erit illud intervallum $= ds$, sed ex ante dictis, datur ratio Coefficientis M ad Coefficientem P, propter datum intervallum inter has Coefficientes, perspicuum est igitur datum iri rationem Mb^{ds} ad Pa^{ds}, hoc est termini medii ad maximum.

Eodem modo, datur ratio termini medii ad terminum quemlibet alium, etenim, sit, ut prius, M coefficiens termini medii, L coefficiens termini cujus intervallum a primo sit p, medius terminus erit $Ma^{\frac{1}{2}n} b^{\frac{1}{2}n}$, terminus alter erit $La^{\frac{1}{2}n+p} b^{\frac{1}{2}n-p}$, si is sumatur versus Binomii principium a^n, sin sumatur ad alteram partem, erit terminus ille $La^{\frac{1}{2}n-p} b^{\frac{1}{2}n+p}$, datur ergo ratio termini medii ad terminum alterum, nimirum ea quam habet M ad $\frac{La^p}{b^p}$, vel M ad $\frac{Lb^p}{a^p}$.

CAPUT

CAPUT IV.

De Puncto Inflexus in Binomio.

SI termini omnes Binomii intelligantur normaliter erigi ſuper lineam rectam ad intervalla æqualia, ducaturque Curva per extremitates omnium terminorum ſeu ordinatarum; Curva ſic deſcripta habebit duplex punctum inflexûs, unum ab utraque parte termini maximi.

Ut autem inveniatur locus ubi conſiſtit ordinata ad cujus extremitatem Punctum inflexus poſitum eſt; ſit H ordinata illa cujus locus deſignetur per l; erit igitur terminus huic ordinatæ proximus verſus Seriei initium $= \frac{l-1}{n-l+2} \times H \times \frac{a}{b}$, terminus vero ab altera parte huic proximus $= \frac{n-l+1}{l} \times H \times \frac{b}{a}$; ponatur differentia terminorum æqualis, ita ut ſit $\frac{n-l+1}{l} \times \frac{b}{a} - 1 = 1 - \frac{l-1}{n-l+2} \times \frac{a}{b}$, hinc emerget valor quantitatis $l = \frac{a+3b+2bn \pm \sqrt{aa+6ab+bb+4nab}}{2a+2b}$.

Nollem autem mentem noſtram ita accipi, quaſi intelligerem Punctum inflexus ſic repertum, idem futurum fore quod Punctum inflexus in ea Curva ſitum, quæ deſcriberetur per extremitates interpolatas terminorum ſingulorum quibus Binomium tanquam repletum fingi poteſt; ſed ad hanc ſpeculationem ſufficit quod Punctum illud quale fuit determinatum, vicinum futurum ſit Puncto inflexus geometrico.

COROLLARIUM I.

Si quantitas $\sqrt{aa+6ab+bb+4nab}$ ponatur $= r$; tum ſumantur termini bini unus ab utraque parte termini maximi, quorum alter, verſus Binomii principium ſpectans, diſtet a Maximo per intervallum $\frac{a-b+r}{2a+2b}$, alter vero ſpectans verſus Binomii finem, diſtet a Maximo

mo per intervallum $\frac{b-a+r}{2a+2b}$; in utroque eorum collocabitur punctum inflexus: unde liquet quod si fuerint a & b æquales, punctum inflexus utrumvis distabit a Maximo termino, id est hoc in casu a Medio per Intervallum $\frac{1}{2}\sqrt{n+2}$, quod si n denotaverit permagnam potestatem, poterit intervallum illud satis bene designari per $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

COROLLARIUM II.

Si sumantur termini quotlibet Binomii, modo ii jaceant inter terminum maximum, & utrumvis punctum inflexus; summa omnium major erit dimidia summa extremorum ducta in numerum terminorum, at vero si ducatur terminus ille qui medium locum obtinet inter extremos in numerum terminorum, productus numerus major erit summa omnium; sin sumantur termini quotlibet jacentes inter utrumvis terminum inflexionis & Binomii principium vel finem, contrarium eveniet; hinc facilis poterit fieri conjectura de summa terminorum quotlibet.

Hæc autem conjectura de summa terminorum juvari poterit Theoremate hic apposito, quod subsidio Methodi Differentiarum contexui; sit igitur A terminus quilibet Binomii, B terminus alter a superiore distans intervallo p, C terminus tertius a secundo distans eodem intervallo p; quibus positis, termini omnes unitate inter se distantes, atque inter A & C interpositi, una cum extremis A & C conficient fere summam $\frac{2p+1}{6p} \times \overline{\overline{p+1} \times \overline{A+C} + \overline{4p-2} \times B}$.

Hoc vero ita restringi debet, ut intervallum inter A & C ne sumatur nimis magnum. Eadem ratione, talia Theoremata condi poterunt quotcunque libitum erit quæ ad multitudinem quamlibet terminorum datam perducantur, sive terminorum intervalla fuerint æqualia sive inæqualia.



LIBER



LIBER VI.

De Seriebus Hyperbolicis, Circularibus, Mixtis, & Determinatis.

CAPUT I.

Seriem Hyperbolicam eam voco, cujus ſumma pendet a quadratura Hyperbolæ.

Seriem Circularem eam voco, cujus Summa pendet a quadratura Circuli.

Seriem mixtam eam voco, cujus ſumma pendet partim a quadratura Hyperbolæ, partim a quadratura Circuli.

Seriem determinatam eam voco, cujus termini procedunt per poteſtates quantitatis determinatæ; quod ſi quantitas iſta determinata, æqualis fuerit Unitati, Series hoc in caſu vocari poteſt Unitate determinata.

Anno 1702 pauca quædam a me contexta circa quadraturas Curvarum mechanicarum Actis Philoſophicis interpoſita fuere; nunc eodem principio quo tum temporis utebar, etiamnum utens, faciendum mihi putavi ut oſtenderem, quam facili negotio, ex ſeriebus aliquot ſimplicibus vulgoque notis, aſcendere liceat ad Series valde implicatas; eademque opera quomodo ex ſeriebus quibuſdam implicatis, ad ſimpliciores ſummabiles, aliquando poſſit fieri regreſſus.

LEMMA.

Poſitâ $v = \log. \frac{1}{1-x}$, atque ideirco $\dot{v} = \frac{\dot{x}}{1-x}$, Fluens quantitatis $vx^n\dot{x}$ poterit exprimi per ſeriem hic ſubjectam, nimirum per

vx^{n+1}

ne $\frac{vx^{n+1}}{n+1} - \frac{v}{1+1} = 0$. hinc erit $x = 1$; erit igitur

$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2\times\overline{n+3}} + \frac{1}{3\times\overline{n+4}} + \frac{1}{4\times\overline{n+5}}$ &c. in infinitum, æqualis Seriei finitæ $\frac{1}{n+1} \times \overline{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3}}$ &c. quæ ad tot terminos continuatur quot sunt Unitates in $n+1$.

COROLLARIUM I.

Si sit $n = 0$, erit $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6}$ &c. $= 1$.

$n = 1$, $\frac{1}{1\times3} + \frac{1}{2\times4} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{4\times6} + \frac{1}{5\times7}$ &c. $= \frac{1}{4}$.

$n = 2$, $\frac{1}{1\times4} + \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{3\times6} + \frac{1}{4\times7} + \frac{1}{5\times8}$ &c. $= \frac{11}{18}$.

$n = 3$, $\frac{1}{1\times5} + \frac{1}{2\times6} + \frac{1}{3\times7} + \frac{1}{4\times8} + \frac{1}{5\times9}$ &c. $= \frac{25}{28}$.

De his Seriebus aliisque posthac memorandis in quibus indeterminata x ad Unitatem restringitur, vide ea quæ tradiderunt Cl. Viri *Leibnitius*, *Jacobus Bernoulli*, *Monmortius* & *Taylorus*.

COROLLARIUM II.

Si sit n numerus impar, tunc ex Æquatione $\frac{vx^{n+1}}{n+1} - \frac{v^1}{n+1} = 0$, poterit deduci $x = -1$. adeoque Series infinita

$-\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2\times\overline{n+3}} - \frac{1}{3\times\overline{n+4}} + \frac{1}{4\times\overline{n+5}}$ &c. æqualis est seriei finitæ $\frac{1}{n+1} \times \overline{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}}$ &c. ad tot terminos continuatæ quot sunt Unitates in $n+1$.

Quapropter si sit n numerus impar; ex summa præcedentium serierum emerget nova series infinita

$\frac{1}{2\times\overline{n+3}} + \frac{1}{4\times\overline{n+5}} + \frac{1}{6\times\overline{n+7}} + \frac{1}{8\times\overline{n+9}} + \frac{1}{10\times\overline{n+11}}$ &c. æqualis Seriei finitæ $\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-5}$ &c. ad tot termi-

Q nos

tinuatæ quot sunt Unitates in $\frac{n+1}{2}$. At vero ex earumdem Serierum differentia emerget altera Series infinita

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3\times\overline{n+4}} + \frac{1}{5\times\overline{n+6}} + \frac{1}{7\times\overline{n+8}} + \frac{1}{9\times\overline{n+10}} \text{ \&c.}$$

æqualis Seriei finitæ $\frac{1}{n+1} \times \overline{\frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-4} + \frac{1}{n-6} \text{ \&c.}}$ ad tot terminos continuatæ quot sunt Unitates in $\frac{n+1}{2}$:

CASUS III.

Resumatur Series casus primi, nimirum

$\frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{30}x^6$ &c. $= vx + x - v$. nunc si multiplicetur pars utraque Æquationis per $\dot{x}$, sumanturque Fluentes, orietur Series infinita $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{120}x^6$ &c. cujus summa æqualis erit $\frac{1}{2}xxv - vx + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}xx$. Ponantur termini $\frac{1}{2}xxv - vx + \frac{1}{2}v = 0$, erit igitur $xx - 2x + 1 = 0$. sive $x = 1$. unde fiet $\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \frac{1}{3\times4\times5} + \frac{1}{4\times5\times6}$ &c. in infinitum $= \frac{1}{4}$.

Sed si descendere libeat ad casus alios particulares, ponatur $-vx + \frac{1}{2}v = 0$, hinc orietur $x = \frac{1}{2}$, adeoque $v = \log. 2$, ex quarum determinatione efficietur Series

$$\frac{1}{1\times2\times3}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2\times3\times4}\times\frac{1}{8} + \frac{1}{3\times4\times5}\times\frac{1}{16} \text{ \&c.} = \frac{1}{4}\log. 2 - \frac{1}{8}$$

sive $\frac{1}{1\times2\times3}\times\frac{1}{1} + \frac{1}{2\times3\times4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3\times4\times5}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4\times5\times6}\times\frac{1}{8}$ &c. $= \log. 2 - \frac{1}{2}$.

CASUS

CASUS IV.

Refumatur iterum Series

$\frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{30}x^6$ &c. $= vx + x - v$. Multiplicetur pars utraque Æquationis per $x\dot{x}$, fumanturque Fluentes, hinc orietur Series infinita $\frac{x^4}{1\times2\times4} + \frac{x^5}{2\times3\times5} + \frac{x^6}{3\times4\times6} + \frac{x^8}{4\times5\times7}$ &c. æqualis expreffioni finitæ, $\frac{1}{3}vx^3 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{2}vxx - \frac{1}{12}xx - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}v$. Pone jam terminos omnes quos v afficit $= 0$, erit idcirco $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6} = 0$. five $2x^3 - 3xx + 1 = 0$, cujus radices erunt 1, 1, $-\frac{1}{2}$, pone $x = 1$. hinc fiet ut Series

$\frac{1}{1\times2\times4} + \frac{1}{2\times3\times5} + \frac{1}{3\times4\times6} + \frac{1}{4\times5\times7}$ &c. in infinitum, fit $= \frac{7}{36}$.

COROLLARIUM I.

Si ex tribus terminis quos v afficit, nimirum $\frac{1}{3}vx^3 - \frac{1}{2}vxx + \frac{1}{6}v$, feligantur duo priores, iique fimul juncti ponantur æquales nihilo, hinc erit $x = \frac{3}{2}$, fed eft $v = \log. \frac{1}{1-x}$; erit igitur hoc in cafu $v = \log. -2$, adeoque propter terminum manentem $\frac{1}{6}v$ five $\frac{1}{6}\log. -2$, Series infinita $\frac{x^4}{1\times2\times4} + \frac{x^5}{2\times3\times5} + \frac{x^6}{3\times4\times6}$ &c. facta $x = \frac{3}{2}$, evadet infinite magna.

COROLLARIUM II.

Si ex tribus terminis $\frac{1}{3}vx^3 - \frac{1}{2}vxx + \frac{1}{6}v$, feligantur primus & tertius, iique fimul juncti ponantur æquales nihilo, evadet $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, adeoque $v = \log. \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}}$, quapropter fumma Seriei infinitæ $\frac{x^4}{1\times2\times4} + \frac{x^5}{2\times3\times5} + \frac{x^6}{3\times4\times6}$ &c. æqualis erit fummæ finitæ quæ affignabitur per radicalitates.

COROLLARIUM III.

Si terminus secundus & tertius simul juncti ponantur æquales nihilo, evadet $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$, adeoque $v=\frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}$: posita igitur $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$, summa Seriei infinitæ suprascriptæ finita evadet & poterit assignari.

CASUS V.

Sumatur Series $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7$ &c. quam Geometræ sciunt esse logarithmum quantitatis $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; sit logarithmus ille $=v$, erit igitur $\dot{v}=\frac{\dot{x}}{1-xx}$. Multiplicetur tum Series infinita, tum quantitas v ipsi æqualis per $\dot{x}$, deinde sumantur Fluentes; hinc orietur $\frac{1}{1\times2}x^2+\frac{1}{3\times4}x^4+\frac{1}{5\times6}x^6+\frac{1}{7\times8}x^8$ &c. $=\text{Fl.}\,v\dot{x}$; sit Fluens illa $=vx-q$, erit igitur $\dot{q}=x\dot{v}=\frac{x\dot{x}}{1-xx}$, sed notum est $\frac{x\dot{x}}{1-xx}$ esse Fluxionem logarithmi quantitatis $\sqrt{\frac{1}{1-xx}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}\times\sqrt{1-x}}$; quamobrem id facile concludetur Seriem infinitam $\frac{1}{1\times2}x^2+\frac{1}{3\times4}x^4+\frac{1}{5\times6}x^6+\frac{1}{7\times8}x^8$ &c. æqualem esse logarithmo quantitatis $\frac{\overline{1+x}|^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}}{\overline{1-x}|^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}}$: Sit jam $x=1$, erit idcirco Series infinita

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{9\times10}\ \&c. = \log.\ 2.$$

CASUS VI.

Resumatur Series casus proxime antecedentis, nimirum $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9$ &c. $=v$. Multiplicetur pars utraque

hujus

hujus Æquationis per $x\dot{x}$, deinde sumantur Fluentes; erit igitur $\frac{1}{1\times3}x^3 + \frac{1}{3\times5}x^5 + \frac{1}{5\times7}x^7 + \frac{1}{7\times9}x^9 + \frac{1}{9\times11}x^{11}$ &c. $=$ Fl. $vx\dot{x}$. Sit Fluens $vx\dot{x} = \frac{1}{2}xxv - q$, erit idcirco $\dot{q} = \frac{1}{2}x^2\dot{v} = \frac{\frac{1}{2}x^2\dot{x}}{1-xx} = -\frac{1}{2}\dot{x} + \frac{\frac{1}{2}\dot{x}}{1-xx}$, adeoque $q = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}v$, quapropter erit

$\frac{1}{1\times3}x^3 + \frac{1}{3\times5}x^5 + \frac{1}{5\times7}x^7 + \frac{1}{7\times9}x^9$ &c. $= \frac{1}{2}xxv + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}v$ pone $\frac{1}{2}xxv - \frac{1}{2}v = 0$. hinc exurget Series infinita

$\frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} + \frac{1}{7\times9} + \frac{1}{9\times11}$ &c. $= \frac{1}{2}$.

CASUS VII.

Sumatur iterum Series casus quinti

$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c. $= v$.

Fiat multiplicatio hujus Æquationis per $x^3\dot{x}$, deinde sumantur Fluentes; hinc orietur

$\frac{1}{1\times5}x^5 + \frac{1}{3\times7}x^7 + \frac{1}{5\times9}x^9 + \frac{1}{7\times11}x^{11}$ &c. $= \frac{1}{4}x^4v + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}v$.

Pone $\frac{1}{4}x^4v - \frac{1}{4}v = 0$. hinc fiet $x = 1$, adeoque erit

$\frac{1}{1\times5} + \frac{1}{3\times7} + \frac{1}{5\times9} + \frac{1}{7\times11} + \frac{1}{9\times13} + \frac{1}{11\times15}$ &c. $= \frac{1}{3}$.

Sed ex Corollario primo casus secundi, inventum fuerat

$\frac{1}{1\times5} + \frac{1}{2\times6} + \frac{1}{3\times7} + \frac{1}{4\times8} + \frac{1}{5\times9} + \frac{1}{6\times10}$ &c. $= \frac{25}{48}$.

Est igitur $\frac{1}{2\times6} + \frac{1}{4\times8} + \frac{1}{6\times10} + \frac{1}{8\times12} + \frac{1}{10\times14}$ &c. $= \frac{3}{16}$.

CASUS VIII.

Sit z arcus circularis cujus radius $= 1$, tangens vero $= x$. Notum est esse $\dot{z} = \frac{\dot{x}}{1+xx}$, adeoque

$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. $= z$. Multiplicetur pars

utra-

utraque Æquationis per $x^n\dot{x}$, posito n numero impari, erit itaque $x^{n+1}\dot{x} - \frac{1}{3}x^{n+3}\dot{x} + \frac{1}{5}x^{n+5}\dot{x} - \frac{1}{7}x^{n+7}\dot{x}$ &c. $= x^n\dot{x}z$. Sumantur utrinque Fluentes, hinc fiet summa Seriei infinitæ $\frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+4}}{3\times\overline{n+4}} + \frac{x^{n+6}}{5\times\overline{n+6}} - \frac{x^{n+8}}{7\times\overline{n+8}}$ &c. æqualis Summæ Seriei finitæ $\frac{1}{n+1}\times\overline{x^{n+1}z - \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-2}}{n-2} - \frac{x^{n-4}}{n-4} + \frac{x^{n-6}}{n-6}}$ &c. $\mp z$. Jam si fuerit $\frac{n+1}{2}$ numerus par, ultimus terminus z afficietur signo negativo, sin fuerit $\frac{n+1}{2}$ numerus impar, ultimus terminus signo affirmativo afficietur.

I. Sit $\frac{n+1}{2}$ numerus par, ponatur idcirco $x^{n+1}z - z = 0$, hinc fiet $x = 1$. quapropter erit Series infinita $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{3\times\overline{n+4}} + \frac{1}{5\times\overline{n+6}} - \frac{1}{7\times\overline{n+8}}$ &c. æqualis Seriei finitæ $\frac{1}{n+1}\times\overline{-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-4} + \frac{1}{n-6}}$ &c. quæ ad tot terminos continuatur quot sunt Unitates in $\frac{n+1}{2}$.

II. Sit $\frac{n+1}{2}$ numerus impar, ideoque ponatur $x^{n+1}z + z = 0$, hinc fiet $x = \sqrt{-1}$, quod indicio est Arcum circularem non posse destrui, unde si ponatur *v. g.* $n = 1$, atque $x = 1$, erit Series infinita $\frac{1}{1\times3} - \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} - \frac{1}{7\times9} + \frac{1}{9\times11}$ &c. $=$ Arc. $45^d - \frac{1}{2}$.

COROLLARIUM.

Si sit n numerus impar, atque eodem tempore $\frac{n+1}{2}$ numerus par, semper invenietur summa Seriei infinitæ $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{3\times\overline{n+4}} + \frac{1}{5\times\overline{n+6}} - \frac{1}{7\times\overline{n+8}}$ &c. æqualis Seriei finitæ $\frac{1}{n+1}\times\overline{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}}$ &c. ad tot terminos continuatæ quot sunt Unitates in $\frac{n+1}{2}$.

CASUS

CASUS IX.

Iisdem positis ac in præcedenti casu, resumptaque Æquatione Fluxionali $x^{n+1}\dot{x} - \frac{1}{3}x^{n+3}\dot{x} + \frac{1}{5}x^{n+5}\dot{x} - \frac{1}{7}x^{n+7}\dot{x}$ &c. $= x^n\dot{x}z$, sit jam n numerus par; tunc assumptis Fluentibus, erit
$\frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+4}}{3\times\overline{n+4}} + \frac{x^{n+6}}{5\times\overline{n+6}} - \frac{x^{n+8}}{7\times\overline{n+8}}$ &c. in infinitum æqualis Seriei finitæ $\frac{1}{n+1} \times \overline{x^{n+1}z - \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-2}}{n-2} - \frac{x^{n-4}}{n-4}}$ &c. $\pm \log. \sqrt{1+xx}$, ubi observandum est, terminum primum & ultimum semper servandos esse; ex intermediis vero tot esse sumendos quot sunt Unitates in $\frac{1}{2}n$.

COROLLARIUM.

Si n ponatur $= 0$, atque $x = 1$, orietur series infinita
$\frac{1}{1\times2} - \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{5\times6} - \frac{1}{7\times8} + \frac{1}{9\times10}$ &c. $=$ Arc. $45^d - \log. \sqrt{2}$. Sed ex casu quinto, inveneramus Seriem infinitam
$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{5\times6} + \frac{1}{7\times8} + \frac{1}{9\times10}$ &c. $= \log. 2 = 2 \log. \sqrt{2}$, hæ autem Series si copulentur per Additionem & Subductionem, hinc orientur Series binæ alteræ,
$\frac{1}{1\times1} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times9} + \frac{1}{7\times13} + \frac{1}{9\times17}$ &c. $=$ Arc. $45^d + \log. \sqrt{2}$
$\frac{1}{2\times3} + \frac{1}{4\times7} + \frac{1}{6\times11} + \frac{1}{8\times15} + \frac{1}{10\times19}$ &c. $= 3 \log. \sqrt{2} -$ Arc. 45^d.
quæ Series duæ posteriores, si ad se invicem addantur; orietur nova Series $\frac{1}{1\times1} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{4\times7} + \frac{1}{5\times9} + \frac{1}{6\times11}$ &c. $= 4 \log. \sqrt{2} = \log. 4$.

CASUS X.

Resumatur Series e casu tertio excerpta, nimirum
$\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{120}x^6$ &c. $= \frac{1}{2}xxv - vx + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}xx$;
jam Multiplicetur tum Series infinita, tum ipsius valor per $\dot{x}$, sumanturque Fluentes; hinc orietur Series infinita
$\frac{1}{1\times2\times3\times4}x^4 + \frac{1}{2\times3\times4\times5}x^5 + \frac{1}{3\times4\times5\times6}x^6 + \frac{1}{4\times5\times6\times7}x^7$ &c.

$=$

$= \frac{1}{6}vx^3 - \frac{1}{2}vxx + \frac{1}{2}vx - \frac{1}{6}v + \frac{11}{36}x^3 - \frac{5}{12}xx + \frac{1}{6}x.$ Pone $x = 1$. hinc fiet

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4} + \frac{1}{2\times3\times4\times5} + \frac{1}{3\times4\times5\times6} + \frac{1}{4\times5\times6\times7} \text{ \&c.} = \frac{1}{18}.$$

Si termini bini $\frac{1}{2}vx - \frac{1}{6}v$ ponantur æquales nihilo, tunc erit $x = \frac{1}{3}$. hoc autem posito, orietur Series

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{2\times3\times4\times5} \times \frac{1}{81} + \frac{1}{3\times4\times5\times6} \times \frac{1}{243} \text{ \&c.} = \frac{5}{81} - \frac{4}{7}\log.\frac{3}{2}.$$

COROLLARIUM.

Si sumatur Progressio geometrica $1 \pm x + xx \pm x^3 + x^4$ &c. quæ multiplicetur per $\dot{x}$, deinde sumantur Fluentes, orietur Series logarithmica $x \pm \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 \pm \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. nimirum logarithmus quantitatis $\frac{1}{1-x}$, vel $1+x$, prout termini alterni signis $+$ aut $-$ afficiuntur.

Si sumatur Series logarithmica, eaque multiplicetur per $\dot{x}$, tum sumantur Fluentes; orietur Series nova cujus summa, vel per quantitates omnino rationales, vel partim per logarithmos partim per quantitates rationales, invenietur.

Si sumatur Series novissime parta, eaque multiplicetur per $\dot{x}$, deinde sumantur Fluentes; orietur Series tertia cujus summa ea methodo quam antea explicavimus invenietur.

Si quando perventum fuerit ad Seriem aliquam ex earum genere quas ante descripsimus, multiplicetur Series genita per $x^n\dot{x}$, tum sumantur Fluentes; orietur Series alia quæ erit vel omnino rationalis, vel partim logarithmica, partim rationalis.

Si Series quotlibet genitæ ut supra, vel earum multiplices juxta numerum, sive eundem, sive diversum, jungantur ad libitum vel per Additionem vel per Subductionem, orientur Series aliæ quarum termini tales erunt ut eorum numeratores crescant secundum variationer omnimodas: at vero hæ Series poterunt dissolvi in componentes simpliciores ope Methodi Differentiarum vulgo notæ.

Possunt etiam Numeratores crescere alia de causâ; etenim si cum perventum fuerit ad Seriem aliquam cujus summa exhibetur in terminis finitis, multiplicetur Series genita æque ac summa ipsi competens per potestatem quamlibet x^p, tunc sumantur Fluxiones utrinque; ex una parte orietur nova Series terminorum quorum Numeratores

ratores crescent in progressione arithmetica, ex altera vero parte summa Seriei exurget.

Si multiplicetur Series nova iterum per potestatem eandem x^t, vel quamlibet aliam x^q, tunc sumantur Fluxiones, orietur Series tertia terminorum quorum Numeratores ita constituentur ut eorum secundæ differentiæ futuræ sint æquales; hujus vero Seriei summa dabitur ex Fluxione summæ Seriei antecedentis. Sicque procedere licet quousque libitum fuerit.

Si sumatur Fluens quantitatis $\frac{\dot{x}}{1-x^3}$, vel $\frac{\dot{x}}{1+x^3}$, vel $\frac{\dot{x}}{1-x^4}$, vel $\frac{\dot{x}}{1+x^4}$, vel denique quantitatis generalis $\frac{\dot{x}}{1\pm x^n}$; tum Fluens ista in Seriem redigatur, ex Serie sic parta gigni poterunt novæ Series quarum Summæ dabuntur.

Si quando perventum fuerit ad Seriem aliquam ex Fluxionibus suprascriptis oriundam, multiplicetur Series illa per potestatem quamlibet x^q, tunc sumantur Fluentes, obtinebuntur Series innumeræ quarum summæ itidem dabuntur, idque per expressiones satis elegantes, præsertim si adhibeatur apta limitatio indeterminatæ x; quod ut exemplo uno vel altero pateat, sit sumenda Fluens quantitatis $\frac{\dot{x}}{1-x^3}$.

Sit z arcus circularis cujus tangens sit $\frac{x\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{2}x}$ ad radium $\sqrt{\frac{3}{4}}$; tunc Fluens quantitatis $\frac{\dot{x}}{1-x^3}$ erit $\frac{1}{3}\log.\frac{1}{1-x}+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}\log.\overline{1+x+xx}$; hoc autem facile deducitur ex iis quæ habuimus in Libro I. & II. quapropter si redigatur quantitas fluxionalis $\frac{\dot{x}}{1-x^3}$ in Seriem infinitam, $\dot{x}+x^3\dot{x}+x^6\dot{x}+x^9\dot{x}$ &c. Fluens hujus Seriei, nimirum $x+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{10}x^{10}$ &c. $=\frac{1}{3}\log.\frac{1}{1-x}+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}\log.\overline{1+x+xx}$; ponatur jam hujus Seriei summa, compendii causa, $=v$ tum fiat utrinque multiplicatio per $\dot{x}$; erit igitur

$x\dot{x}+\frac{1}{4}x^4\dot{x}+\frac{1}{7}x^7\dot{x}+\frac{1}{10}x^{10}\dot{x}+\frac{1}{13}x^{13}\dot{x}$ &c. $=v\dot{x}$, adeoque

$\frac{1}{2}xx + \frac{1}{4\times5}x^5 + \frac{1}{7\times8}x^8 + \frac{1}{10\times11}x^{11}$ &c. $=$ Fl. $v\dot{x}$. Sit Fluens quantitatis $v\dot{x} = vx - q$, hinc fiet $\dot{q} = x\dot{v} = \frac{x\dot{x}}{1-x^3}$, cujus Fluens invenietur $= \frac{1}{3}\log.\frac{1}{1-x} - \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}\log.\overline{1+x+xx}$, inde erit Fl. $v\dot{x} = vx - \frac{1}{3}\log.\frac{1}{1-x} + \frac{2}{3}z - \frac{1}{6}\log.\overline{1+x+xx}$; nunc si in locum quantitatis v, substituatur illius valor; hæc conclusio facile elici poterit, fore

$\frac{1}{1\times2}xx + \frac{1}{4\times5}x^5 + \frac{1}{7\times8}x^8$ &c. $= \frac{1}{3}\times\overline{x-1}\times\log.\frac{1}{1-x} + \frac{2}{3}\times\overline{x+1}\times z.$

jam si velis ut x sit $= 1$, pars logarithmica destruetur, z vero repræsentabit arcum triginta graduum ad Radium $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, adeoque erit

$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{7\times8} + \frac{1}{10\times11} + \frac{1}{13\times14} + \frac{1}{16\times17}$ &c. $= \frac{4}{3}z$;

at si posueris $x = -1$, exurget nova Series

$\frac{1}{1\times2} - \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{7\times8} - \frac{1}{10\times11} + \frac{1}{13\times14} - \frac{1}{16\times17}$ &c. $= \frac{2}{3}\log. 2.$

Non deerunt fortasse qui diffisuri sint conclusioni supra positæ, nempe fore ut quantitas $\overline{x-1}\log.\frac{1}{1-x}$ evanescat, si ita acciderit ut x sit $= 1$; etenim quanquam per se pateat factorem $x-1$ tunc esse nihilo æqualem, attamen cum eodem tempore $\log.\frac{1}{1-x}$ fiat quantitas infinite magna, dubitatio potest oriri an quantitates illæ inter se multiplicatæ non effecturæ sint quantitatem finitam, hæc vero difficultas non melius credo tolletur, quam si quantitas x paulisper indeterminata relinquatur; porro $\log.\frac{1}{1-x}$ est $x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c. $= 1$, qui si ducatur in $x-1$, procreabitur Series

$-x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5$ &c. fac nunc esse $x = 1$, Series igitur ista in hanc alteram mutabitur

$-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ &c. at vero Series novissima, secluso primo ejus termino, ante demonstrata fuit $= 1$; proinde quantitas $\overline{x-1}\log.\frac{1}{1-x}$, cum x restricta fuerit ad Unitatem, omnino destruetur.

CAPUT

CAPUT II.

De Regressu e Serie data ad Summam.

HActenus de inventione Serierum quæ summari possint: sequitur nunc ut inquiramus quonam artificio ex data Serie ad summam regredi liceat; id vero illis difficile non videbitur qui ad ea quæ ante de methodo directa habuimus attenderunt, attamen ne sit hæsitationi locus, exempla quædam de methodo inversa afferre visum est, ut Lectoribus plenius pateat quibus gradibus scopus propositus attingatur. Sit igitur summanda Series

$$\frac{x}{1\times3\times6} + \frac{x^3}{3\times5\times8} + \frac{x^5}{5\times7\times10} + \frac{x^7}{7\times9\times12} + \frac{x^9}{9\times11\times14} \text{ \&c.}$$

I. Quoniam primi omnes Denominatorum factores sunt 1, 3, 5, 7, 9 &c. assumo Seriem logarithmicam

$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c. $= \log.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, hunc vero logarithmum pono $= v$, hinc fit ut $\dot{v}$ sit $= \frac{\dot{x}}{1-xx}$.

II. Quoniam intervallum inter primum & secundum cujuslibet Denominatoris factorem est $=2$, multiplicio Seriem logarithmicam per $x\dot{x}$, multiplicaturus per $x^{n-1}\dot{x}$ si intervallum esset $= n$. Inde prodibit

$x^2\dot{x} + \frac{1}{3}x^4\dot{x} + \frac{1}{5}x^6\dot{x} + \frac{1}{7}x^8\dot{x} + \frac{1}{9}x^{10}\dot{x}$ &c. $= vx\dot{x}$, tunc assumptis Fluentibus, orietur

$$\frac{1}{1\times3}x^3 + \frac{1}{3\times5}x^5 + \frac{1}{5\times7}x^7 + \frac{1}{7\times9}x^9 \text{ \&c.} = \frac{1}{2}xxv + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}v.$$

III. Quoniam intervallum inter secundum & tertium cujusque Denominatoris factorem est $=3$, multiplico jam Seriem novissime partam per $x^2\dot{x}$, hinc fiet

$$\frac{1}{1\times3}x^5\dot{x} + \frac{1}{3\times5}x^7\dot{x} + \frac{1}{5\times7}x^9\dot{x} + \frac{1}{7\times9}x^{11}\dot{x} = \frac{1}{2}x^4\dot{x} + \frac{1}{2}x^3\dot{x} - \frac{1}{2}vx^2\dot{x}$$

assumptisque iterum Fluentibus, invenietur

$$\frac{1}{1\times3\times6}x^6 + \frac{1}{3\times5\times8}x^8 + \frac{1}{5\times7\times10}x^{10} + \frac{1}{7\times9\times12}x^{12} + \frac{1}{9\times11\times14}x^{14} \text{ \&c.}$$

$= \frac{1}{10}x^5 v - \frac{1}{6}x^3 v + \frac{1}{15}z + \frac{3}{20}x^4 - \frac{1}{30}xx$, ubi notandum est per quantitatem z intelligi Fluentem quantitatis $\frac{x\dot{x}}{1-xx}$ quo fit ut $v - z = \log \overline{1+x}$. Erit igitur summa Seriei propositæ

$= \frac{1}{10}v - \frac{v}{6xx} + \frac{z}{15x^5} + \frac{3}{20x} - \frac{1}{30x^3}$. Pone $x = 1$, tunc Series infinita evadet $\frac{1}{1\times3\times6} + \frac{1}{3\times5\times8} + \frac{1}{5\times7\times10} + \frac{1}{7\times9\times12} + \frac{1}{9\times11\times14}$ &c. cujus summa erit $= \frac{7}{60} - \frac{1}{15}\log. 2$.

Hoc fundamento nituntur ea quæ ante tradidimus de inventione Termini in Binomio $a+b$ ad potestatem permagnam evecto, quæ ut nunc palam fiant, necesse est illud præmittere quod vulgo notum est, nempe Coefficientem termini distantis a primo per intervallum quodvis designatum per l, esse productum

$\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}$ &c. ad tot factores continuatum quot sunt Unitates in l: jam si invertatur ordo factorum ita ut is qui antea ultimus ponebatur nunc evadat primus, liquet Coefficientem termini desiderati evasuram

$\frac{n-l+1}{l} \times \frac{n-l+2}{l-1} \times \frac{n-l+3}{l-2} \times \frac{n-l+4}{l-3} \times \frac{n-l+5}{l-4}$ &c.

Porro si sit n numerus par, intervallum Termini medii ab utrovis Binomii extremo erit $\frac{1}{2}n$, scripto itaque $\frac{1}{2}n$ pro l, erit Coefficiens Termini medii

$\frac{\frac{1}{2}n+1}{\frac{1}{2}n} \times \frac{\frac{1}{2}n+2}{\frac{1}{2}n-1} \times \frac{\frac{1}{2}n+3}{\frac{1}{2}n-2} \times \frac{\frac{1}{2}n+4}{\frac{1}{2}n-3} \times \frac{\frac{1}{2}n+5}{\frac{1}{2}n-4}$ &c.

Sive ponendo $\frac{1}{2}n = m$, erit Coefficiens Termini medii

$\frac{m+1}{m} \times \frac{m+2}{m-1} \times \frac{m+3}{m-2} \times \frac{m+4}{m-3} \times \frac{m+5}{m-4}$ &c. ad tot factores continuata quot sunt Unitates in m, quo fiet ut Numerator ultimi factoris necessario futurus sit $= 2m$.

Quam-

Quamobrem si scribatur Denominator cujusque factoris sub Numeratore factoris antecedentis, evadet Coefficiens medii Termini

$$\frac{m+1}{m-1} \times \frac{m+2}{m-2} \times \frac{m+3}{m-3} \times \frac{m+4}{m-4} \times \frac{m+5}{m-5} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2m}{m}.$$

quæ Series, seclusо ultimo ejus termino, ad tot factores continuatur quot sunt Unitates in $m-1$. Ex quo sequitur Logarithmos factorum per Series infinitas exhibitos, sic prodituros.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \text{ in } \frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{3m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} \text{ \&c.} \\ 2 \text{ in } \frac{2}{m} + \frac{8}{7m^3} + \frac{32}{5m^5} + \frac{128}{7m_7} + \frac{512}{9m^9} \text{ \&c.} \\ 2 \text{ in } \frac{3}{m} + \frac{27}{3m^3} + \frac{243}{5m^5} + \frac{2187}{7m^7} + \frac{19683}{9m^9} \text{ \&c.} \end{array}\right\} + \log. 2.$$

&c.

Has autem Series in Columnas perpendiculares distribuo quarum singulæ tot contineant terminos quot sunt Unitates in $m-1$.

Columna I. $= \frac{2}{m}$ in $1+2+3+4+5+6+7+8$ &c.

. . . . . II. $= \frac{2}{3m^3}$ in $1+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3$ &c.

. . . . . III. $= \frac{2}{5m^5}$ in $1+2^5+3^5+4^5+5^5+6^5+7^5+8^5$ &c.

. . . . . IV. $= \frac{2}{7m^7}$ in $1+2^7+3^7+4^7+5^7+6^7+7^7+8^7$ &c.

&c.

Cum primum huic investigationi operam dedi, aderat forte ad manum Tabula Cl. Viri *Jacobi Bernoulli*, exhibens summas potestatum numerorum naturalium, cujus beneficio labor Calculi magna ex parte fuit allevatus. Quapropter ex ea Tabula tantum decerpere visum est quantum ad scopum nostrum pertinet; facto itaque $m-1=s$.

Summa Columnæ I. erit, $\frac{ss+s}{m}$

II. . . . $\frac{\frac{1}{2}s^4+s^3+\frac{1}{2}ss}{3m^3}$

III. . . . $\frac{\frac{1}{3}s^6+s^5+\frac{5}{6}s^4 * -\frac{1}{6}ss}{5m^5}$ &c.

IV.

$$\text{IV.}\ldots\ldots \frac{\frac{1}{4}s^8 + s^7 + \frac{7}{6}s^6 * - \frac{7}{12}s^4 \text{ \&c.}}{7m^7}$$

$$\text{V.}\ldots\ldots \frac{\frac{1}{5}s^{10} + s^9 + \frac{3}{2}s^8 * - \frac{7}{5}s^6 \text{ \&c.}}{9m^9}$$

&c.

Verum ut ſummæ ſummarum poſſint obtineri, eas iterum diſtribuo in Columnas perpendiculares, quarum prima, poſito $\frac{s}{m} = x$; erit s in $x + \frac{1}{2\times3}x^3 + \frac{1}{3\times5}x^5 + \frac{1}{4\times7}x^7 + \frac{1}{5\times9}x^9$ &c. ſive s in $\frac{2x}{1\times2} + \frac{2}{3\times4}x^3 + \frac{2}{5\times6}x^5 + \frac{2}{7\times8}x^7 + \frac{2}{9\times10}x^9$ &c.

Pone $\frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9$ &c. ſeu log. $\frac{1+x}{1-x} = v$; tum facta multiplicatione utrinque per $\dot{x}$, orietur

$$\frac{2x\dot{x}}{1} + \frac{2x^3\dot{x}}{3} + \frac{2x^5\dot{x}}{5} + \frac{2x^7\dot{x}}{7} + \frac{2x^9\dot{x}}{9} \text{ \&c.} = v\dot{x}$$

deinde, aſſumptis utrinque Fluentibus, invenietur

$$\frac{2x^2}{1\times2} + \frac{2x^4}{3\times4} + \frac{2x^6}{5\times6} + \frac{2x^8}{7\times8} \text{ \&c.} = x \log. \frac{1+x}{1-x} - \log. \frac{1}{1-xx}.$$

Porro facta diviſione utrinque per x, & multiplicatione per s; ſeu, quod eodem recidit, facta utrinque multiplicatione per m, invenietur Series propoſita

$$\frac{ss}{m} + \frac{s^4}{2\times3m^3} + \frac{s^6}{3\times5\times m^5} + \frac{s^8}{4\times7\times m^7} \text{ \&c.} = mx \log. \frac{1+x}{1-x} - m \log. \frac{1}{1-xx}$$

$$= \overline{2m-1} \log. \overline{2m-1} - 2m \log. m$$

Secunda Columna conſtituit Seriem ſequentem

$\frac{s}{m} + \frac{s^3}{3m^3} + \frac{s^5}{5m^5} + \frac{s^7}{7m^7} + \frac{s^9}{7m^9}$ &c. cujus Summa, ut notum eſt, $= \frac{1}{2} \log. \frac{m+s}{m-s} = \frac{1}{2} \log. \overline{2m-1}$.

Hinc ſumma utriuſque Columnæ erit $\overline{2m - \frac{1}{2}} \times \log. \overline{2m-1}$ $-2m \log. m$, cui ſi adjungatur log. 2. quem ſe poſueramus, erit aggregatum $\overline{2m - \frac{1}{2}} \log. \overline{2m-1} - 2m \log. m + \log. 2.$ e quo ſi ſubtrahatur

2m

$2m\log.2$, hoc eſt logarithmus poteſtatis 2^{2m} relinquetur,

$\overline{2m - \frac{1}{2}}\log.\overline{2m-1} - 2m\log.2m + \log.2$, cui, propter $2m=n$, reſpondet numerus $\frac{2\times\overline{n-1}|^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$, quo fere deſignatur ratio termini medii ad ſummam terminorum omnium in poteſtate cujus index eſt n. Tertia Columna conſtituit progreſſionem geometricam

$\frac{ss}{6m^3} + \frac{s^4}{6m^5} + \frac{s^6}{6m^7} + \frac{s^8}{6m^9} + \frac{s^{10}}{6m^{11}}$ &c. ſeu

$\frac{ss}{6m^3} \times \overline{1 + \frac{ss}{mm} + \frac{s^4}{m^4} + \frac{s^6}{m^6} + \frac{s^8}{m^8}}$ &c. cujus ſumma æqualis eſt quantitati $\frac{1}{6m} \times \frac{\overline{m-1}|^2}{2m-1}$.

Quarta Columna conſtituit Seriem

$\frac{ss}{180m^3} \times \overline{6 + \frac{15ss}{mm} + \frac{28s^4}{m^4} + \frac{45s^6}{m^6} + \frac{66s^8}{m^8}}$ &c. cujus Scala relationis eſt $3-3+1$, cujuſque idcirco ſumma invenietur eſſe

$\frac{\overline{4m^4+2m^3+3mm-4m+1} \times \overline{m-1}|^2}{180m^3 \times \overline{2m-1}|^3}$, quæ ſigno negativo affici debet.

Cum vero perciperem has Series valde implicatas evadere, quanquam omnes perfecte ſummabiles; nihil mihi potius faciendum duxi, quam ut eas ad caſum infinitum transferrem; pone igitur m infinitam, tunc ſumma primæ Seriei rationalis redigetur ad $\frac{1}{12}$, ſumma ſecundæ ad $\frac{1}{360}$; ſic fit, ut ſummæ Serierum omnium confecturæ ſint Seriem unicam $\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$ &c. cujus tot termini erui poterunt quot libitum erit; ſed in his quatuor conſtiti, utpote qui ſuppeditaturi eſſent approximationem ſatis accuratam; jam cum hæc Series ſit convergens, tum ejus termini ſignis alternatim affirmativis & negativis afficiantur, concludere licet primum terminum $\frac{1}{12}$ majorem eſſe ſumma Seriei, ſeu primum terminum majorem eſſe differentia quæ intercedit inter terminos omnes affirmativos, & terminos omnes negativos; ſed terminus iſte tanquam logarithmus Hyperbolicus habendus eſt; porro numerus huic logarithmo competens eſt 1.0869, pro-

prope, qui si per 2 multiplicetur, productus numerus erit 2.1738, adeoque in potestate infinita designata per n, quantitas $\frac{2.1738 \times \overline{n-1}|^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$ major erit ea ratione quam habet medius hujus potestatis terminus ad summam omnium terminorum, & pergendo ad cæteros terminos, id comperietur factorem 2.1676 esse justo minorem, itemque 2.1695 esse æquo majorem, rursus 2.1682 infra verum paululum subsidere; quibus perpensis, conclusi factorem 2.168 seu $2\frac{21}{125}$, in potestate non quidem infinita, sed permagna, posse tuto adhiberi, præsertim cum in potestate quingentesima, factor ille vix in rationem desideratam eum errorem inducturus sit, qui ad sexagesimam partem millesimæ ejus partis possit assurgere.

COROLLARIUM.

Cum vero quantitas $\frac{\overline{n-1}|^n}{n^n}$, sit fere quantitas data ut pote quæ sit proxime æqualis Seriei infinitæ, $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}$ &c. qua numerus respondens logarithmo Hyperbolico -1 exhibetur, sequitur rationes medias potestatum permagnarum esse fere inter se in ratione subduplicata inverse eorum indicum quibus hæ potestates designantur.

Eodem ratiocinandi modo, inventa fuerat ratio Coefficientis termini medii ad Coefficientem termini cujuslibet distantis a medio, intervallo quolibet dato p. Etenim cum illa ratio designari possit Serie sequenti, posita $n=2m$.

$\frac{m+p}{m}$ in $\frac{m+1}{m-1} \times \frac{m+2}{m-2} \times \frac{m+3}{m-3} \times \frac{m+4}{m-4} \times \frac{m+5}{m-5}$ &c. ad tot terminos continuata, absque communi multiplicatione $\frac{m+p}{m}$, quot sunt Unitates in $p-1$: logarithmus hujus rationis poterit exprimi per sequentes Series infinitas

$$\left.\begin{array}{l}
2\times\frac{1}{m}+\frac{1}{3m^3}+\frac{1}{5m^5}+\frac{1}{7m^7}+\frac{1}{9m^9}\ \&c. \\
2\times\frac{2}{m}+\frac{2^3}{3m^3}+\frac{2^5}{5m^5}+\frac{2^7}{7m^7}+\frac{2^9}{9m^9}\ \&c. \\
2\times\frac{3}{m}+\frac{3^3}{3m^3}+\frac{3^5}{5m^5}+\frac{3^7}{7m^7}+\frac{3^9}{9m^9}\ \&c. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2\times\frac{p-1}{m}+\frac{\overline{p-1}^3}{3m^3}+\frac{\overline{p-1}^5}{5m^5}+\frac{\overline{p-1}^7}{7m^7}+\frac{\overline{p-1}^9}{9m^9}\ \&c.
\end{array}\right\} + \log.\frac{m+p}{p}$$

Quo fiet, vestigiis insistendo solutionis præcedentis, ut logarithmus rationis desideratæ inveniatur esse =

$$\overline{m+p-\tfrac{1}{2}}\times\log.\overline{m+p-1}+\overline{m-p+\tfrac{1}{2}}\times\log.\overline{m-p+1}-2m\log.m$$

$+\log.\frac{m+p}{m}$ proxime

adeoque ratio desiderata ea est quam ante definivimus, nempe

$$\frac{\overline{m+p-1}^{\,m+p-\frac{1}{2}}\times\overline{m-p+1}^{\,m-p+\frac{1}{2}}\times\frac{m+p}{m}}{m^{2m}}$$

Hic autem, Series omnes post binas logarithmicas neglectæ fuerunt, sed error hinc oriundus non est tanti momenti ut sit operæ pretium quidquam in hac expressione immutare, attamen quibus visum erit eam accuratiorem reddere, ii poterunt illud efficere ea methodo quam ante exposuimus.

CAPUT III.

De Seriebus Determinatis.

QUanquam plura de his Seriebus jam antea habuimus quæ tanquam Corollaria ex generali quadraturarum methodo deducta fuerunt; attamen si tales obvenerint Series earum summæ sæpissime absque quadraturis invenientur.

Vir Cl. *Jacobus Bernoulli* in Tractatu suo de Seriebus infinitis artificium exponit quo hujus generis Series quotcunque libitum erit, summabiles omnes invenire liceat, qu inetiam ostendit quemadmodum in plerisque casibus e Serie data ad summam fieri possit regressus.

 Assu-

Assumit Autor Seriem quamlibet Unitate determinatam (utrum sit accurate summabilis nec ne, nihil refert, modo ejus termini ad nihilum perpetuo convergant) e quâ Seriem eandem termino suo primo, vel terminis duobus primis, vel terminis tribus primis multatam subtrahit; inde illud fit ut quod relinquitur vel æquale sit termino primo Seriei assumptæ, vel terminis ejus duobus primis, vel terminis tribus primis, & sic in infinitum. Hanc autem operandi rationem circa Series hac subtractione comparatas iterare licet, unde novæ Series in infinitum exurgent quæ omnes summabiles erunt.

Ut Viri Cl. Methodus exemplis illustretur; sumatur Series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ &c. e qua subtrahatur ipsamet dempto termino suo primo, hoc est subtrahatur $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ &c. quo facto, relinquitur $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6} + \frac{1}{6\times7} + \frac{1}{7\times8}$ &c. $= 1$.

Rursus a Serie assumpta, subtrahatur ipsa met demptis duobus primis ejus terminis, hoc est a Serie

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ &c. subtrahatur

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ &c. tunc relinquitur

$\frac{2}{2\times3} + \frac{2}{2\times4} + \frac{2}{3\times5} + \frac{2}{4\times6} + \frac{2}{5\times7} + \frac{2}{6\times8}$ &c. $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

A Serie quam modo comparavimus, subtrahatur ipsamet dempto termino suo primo, hoc est subtrahatur Series

$\frac{2}{2\times4} + \frac{2}{3\times5} + \frac{2}{4\times6} + \frac{2}{5\times7} + \frac{2}{6\times8}$ &c, tum relinquitur Series

$\frac{10}{1\times2\times3\times4} + \frac{14}{2\times3\times4\times5} + \frac{18}{3\times4\times5\times6} + \frac{22}{4\times5\times6\times7}$ &c. $= \frac{2}{3}$.

Quanquam vero methodus a Cl. Autore adhibita eximiam præ se ferat simplicitatem, attamen conclusiones inde derivatæ, ab alia Methodo priori quidem affini, sed aliquanto latius patente, nec minus simplici, derivari potuissent.

Methodus autem ea in hoc sita est, ut assumpta Serie qualibet infinita, cujus termini tum ad nihilum perpetuo convergant, tum procedant per potestates indeterminatæ x, si multiplicetur Series assumpta per Binomium vel Multinomium utcunque conflatum ex quantitatibus datis & indeterminata x, deinde ponatur Binomium vel Multinomium illud æquale nihilo; hinc elicietur Valor indeterminatæ x, ad quem si quantitas ista x restringatur, tunc Series ex hac multiplicatione genita evadet etiam nihilo æqualis; quapropter si transferantur ter-

...rmini ejus primi ad alteram Æquationis partem, Series residua æqualis erit terminis translatis.

Sumatur exempli gratia Series $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}xx+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4$ &c. quæ si multiplicetur per Binomium $x-1$, erit Series genita $-1+\frac{1}{1\times2}x+\frac{1}{2\times3}xx+\frac{1}{3\times4}x^3+\frac{1}{4\times5}x^4+\frac{1}{5\times6}x^5$ &c. sit prioris summa $=s$, erit igitur summa posterioris $=\overline{x-1}\times s$; pone prioris summam datam esse, hinc dabitur summa posterioris, pone prioris summam esse incognitam, erit igitur summa posterioris incognita, quandiu steterit indeterminata x; fac nunc $x-1=0$, tum fiet $x=1$; quapropter si in Serie genita scribatur 1 loco x, orietur Series

$-1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}$ &c. $=0$, cujus primus terminus si transferatur ad alteram Æquationis partem, erit summa Seriei, $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}$ &c. $=1$.

Si sumatur Series $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}xx+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4$ &c. $=s$, atque ea multiplicetur per $xx-1$, erit Series genita

$-1-\frac{1}{2}x+\frac{2}{1\times3}xx+\frac{2}{2\times4}x^3+\frac{2}{3\times5}x^4+\frac{2}{4\times6}x^5$ &c. $=\overline{xx-1}\times s$, pone $x=1$, hinc emerget Series

$\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{2\times4}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{4\times6}+\frac{2}{5\times7}+\frac{2}{6\times8}$ &c. $=\frac{3}{2}$, eadem nempe quæ oritur e Methodo *Bernoulliana*, cum a Serie

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. Subtrahitur ipsamet duobus primis terminis multata.

Si fiat multiplicatio Seriei assumptæ $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4$ &c. per x^3-1, deinde ponatur $x^3-1=0$, quo fiet $x=1$; hinc eadem emerget Series eademque summa ac ea quæ deduceretur ex Methodo *Bernoulliana*, si e Serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. ipsamet Series terminis tribus primis multata subtraheretur, & sic deinceps.

Si fiat Multiplicatio seriei assumptæ $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4$ &c. per $\overline{x-1}^{|2}$ seu per $1-2x+xx$, deinde ponatur $x=1$, eadem orietur series eademque summa ac ea quæ prodiret e Methodo *Bernoulliana*, si

si e ferie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. fubtraheretur ipfamet primo termino fuo multata, tum e ferie jam parta fubtraheretur etiam hæc ipfa termino fuo primo multata.

Si fiat Multiplicatio Seriei affumptæ $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}xx+\frac{1}{4}x^3$ &c. per $\overline{x-1}\times\overline{x^3-1}$, feu per $1-x-x^3+x^4$, deinde ponatur $x=1$, eadem orietur Series eademque fumma, ac ea quæ prodiret, fi ex Serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. fubtraheretur ipfamet termino fuo primo multata, tum e Serie jam parta, fubtraheretur itidem hæc ipfa, terminis tribus fuis primis multata.

Si fiat Multiplicatio Seriei affumptæ $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}xx+\frac{1}{4}x^4$ &c. $=f$, per $2x-1$, orietur feries $-1+\frac{3}{1\times2}x+\frac{4}{2\times3}xx+\frac{5}{3\times4}x^3+\frac{6}{4\times5}x^4+\frac{7}{5\times6}x^5$ &c. $=\overline{2x-1}\times f$ pone $2x-1=0$. erit igitur $x=\frac{1}{2}$. ex quo efficietur ut feries

$\frac{3}{1\times2}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{2\times3}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{3\times4}\times\frac{1}{8}+\frac{6}{4\times5}\times\frac{1}{16}+\frac{7}{5\times6}\times\frac{1}{32}$ &c. fit $=1$.

Hanc vero conclufionem Methodus fubtractionum non æque facile arcefferet.

Si fiat Multiplicatio feriei affumptæ $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}xx+\frac{1}{4}x^4$ &c. $=f$, per $3x-1$, tum ponatur $3x-1=0$. hinc emerget feries $\frac{5}{1\times2}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{2\times3}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{3\times4}\times\frac{1}{27}+\frac{11}{4\times5}\times\frac{1}{81}+\frac{13}{5\times7}\times\frac{1}{243}$ &c. $=1$.

Si fiat Multiplicatio Seriei affumptæ $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}xx+\frac{1}{4}x^3$ &c. $=f$, per $\overline{2x-1}\times\overline{3x-1}$, five per $1-5x+6xx$, feries genita erit $+1-\frac{9}{2}x+\frac{23}{1\times2\times3}xx+\frac{58}{2\times3\times4}x^3+\frac{57}{3\times4\times5}x^4$ &c. $=\overline{2x-1}\times\overline{3x-1}\times f$, pone nunc tum $2x-1=0$. tum $3x-1=0$. in priori cafu erit $x=\frac{1}{2}$, in pofteriori erit $x=\frac{1}{3}$, hinc nafcentur Series binæ

$\frac{23}{1\times2\times3}\times\frac{1}{4}+\frac{38}{2\times3\times4}\times\frac{1}{8}+\frac{57}{3\times4\times5}\times\frac{1}{16}+\frac{80}{4\times5\times6}\times\frac{1}{32}$ &c. $=\frac{5}{4}$,

$\frac{23}{1\times2\times3}\times\frac{1}{9}+\frac{38}{2\times3\times4}\times\frac{1}{27}+\frac{57}{3\times4\times5}\times\frac{1}{81}+\frac{80}{4\times5\times6}\times\frac{1}{243}$ &c. $=\frac{1}{2}$.

In his autem Seriebus differentiæ numeratorum funt in progreffione arithmetica.

Eodem

Eodem modo, ſi multiplicetur ſeries aſſumpta

$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3$ &c. per $\overline{x-1} \times \overline{2x-1}$, ſive per $1 - 3x + 2xx$, generabitur Series

$$1 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{1\times2\times3}xx + \frac{6}{2\times3\times4}x^3 + \frac{7}{3\times4\times5}x^4 \text{ \&c.} = \overline{x-1} \times \overline{2x-1} \times s,$$

pone $x - 1 = 0$. hinc erit $x = 1$, itemque pone $2x - 1 = 0$, tunc erit $x = \frac{1}{2}$, unde binæ emergent ſeries quarum ſummæ dabuntur, quarum prior $\frac{5}{1\times2\times3} + \frac{6}{2\times3\times4} + \frac{7}{3\times4\times5} + \frac{8}{4\times5\times6}$ &c. $= \frac{3}{2}$, poſterior vero $\frac{5}{1\times2\times3} \times \frac{1}{4} + \frac{6}{2\times3\times4} \times \frac{1}{8} + \frac{7}{3\times4\times5} \times \frac{1}{16} + \frac{8}{4\times5\times6} \times \frac{1}{32}$ &c. $= \frac{1}{4}$.

Quomodo autem ex data ſerie experiri liceat num poſſit ſumma accurate exhiberi, id melius exemplis quam præceptorum multitudine declarabimus.

Cum vero Cl. *Monmort* ſeries aliquot ex eo genere quod Unitate determinatum appellamus ediderit, eas quas ille tanquam primarias attulit e methodo noſtra deducere conabimur, paucis ante præmiſſis de ipſius Methodo quam Methodo Incrementorum *Taylorianæ* dixit affinem.

Sumit Vir Cl. quantitatem quamcunque, qualem *v. g.* $\frac{p}{p+1}$ quam ſtatuit eſſe ſummam tot terminorum ſeriei cujuſdam poſthac determinandæ quot ſunt Unitates in p: ex hac aſſumptione id ſequitur, quantitatem $\frac{p-1}{p}$ futuram eſſe ſummam tot terminorum ejuſdem Seriei quot ſunt Unitates in $p - 1$, adeoque differentiam quantitatum $\frac{p}{p+1}$ & $\frac{p-1}{p}$ deſignaturam eum Seriei terminum cujus locus, numeratione incepta a primo termino, incidit in numerum p; at vero differentia harum quantitatum fit $\frac{1}{p\times\overline{p+1}}$, unde id neceſſario colligitur quod ſi quantitas p poſita fuerit ſucceſſive æqualis numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c. hinc oritura ſit Series terminorum $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6} + \frac{1}{6\times7}$ &c. quorum ſumma, poſito p numero terminorum, conficiet numerum $\frac{p}{p+1}$.

Fatendum tamen eſt Virum Clariſſimum non ita perſpicue mentem ſuam aperuiſſe; etenim cum in id videatur potiſſimum incubuiſſe

buisse ut Theoremata plurima concinnaret, non mirum est ei contigisse ut veram expositionem principii in quo ea nituntur subobscure indicare; eos interim monendos censeo qui in hanc methodum penitius inspicere velint, ut ea consulant quæ de hoc argumento scripsit Vir eruditissimus D. *Brook Taylor* in Appendice suo ad Series *Monmortianas* adjecto.

Series prima ex iis quas Cl. Autor in præcipuarum numero collocat, cujusque summam hic exhibere aggredimur conspicitur sub litera A; ea autem sic se habet

$A = \frac{5}{1\times2\times3\times4} + \frac{9}{3\times4\times5\times6} + \frac{13}{5\times6\times7\times8} + \frac{17}{7\times8\times9\times10}$ &c. jam vero, quoniam Denominator quilibet ex factoribus quatuor constans, in factores alios ex partibus duabus conflatos dividi potest, quorum singuli bini in terminis duobis sibi proximis semper reperiuntur, assumatur series

$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{3\times4}x + \frac{1}{5\times6}xx + \frac{1}{7\times8}x^3 + \frac{1}{9\times10}x^4$ &c. $= f$. Fiat nunc multiplicatio Seriei assumptæ per $x-1$; hinc erit series genita

$= -\frac{1}{1\times2} + \frac{10}{1\times2\times3\times4}x + \frac{18}{3\times4\times5\times6}xx + \frac{26}{5\times6\times7\times8}x^3$ &c. $= \overline{x-1} \times f$, pone jam $x-1=0$, tum si transferatur primus terminus ad alteram Æquationis partem, totumque dividatur per 2, emerget

$\frac{5}{1\times2\times3\times4} + \frac{9}{3\times4\times5\times6} + \frac{13}{5\times6\times7\times8} + \frac{17}{7\times8\times9\times10}$ &c. $= \frac{1}{4}$.

At si id requiratur ut non modo summa seriei infinitæ assignetur, sed summa tot terminorum quot quis assignare libuerit, id ad hunc modum conficietur.

Determinetur Methodo Differentiali, de qua posthac nonnulla sumus dicturi, expressio termini cujuslibet ex positione loci quem is occupat, tunc si ponatur n esse is numerus quo designatur locus termini desiderati, invenietur ille terminus $= \frac{4n+1}{\overline{2n-1} \times 2n \times \overline{2n+1} \times \overline{2n+2}}$,

adeoque post terminos numero n, exurget series

$$\frac{4n+5}{\overline{2n+1} \times \overline{2n+2} \times \overline{2n+3} \times \overline{2n+4}} + \frac{4n+9}{\overline{2n+3} \times \overline{2n+4} \times \overline{2n+5} \times \overline{2n+6}} +$$

$$\frac{4n+13}{\overline{2n+5} \times \overline{2n+2} \times \overline{6n+7} \times \overline{2n+8}} + \frac{4n+17}{\overline{2n+7} \times \overline{2n+8} \times \overline{2n+9} \times \overline{2n+10}} \text{ \&c.}$$

Qu-

Quapropter assumpta serie

$$\frac{1}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+2}}+\frac{1}{\overline{2n+3}\times\overline{2n+4}}x+\frac{1}{\overline{2n+5}\times\overline{2n+6}}x^2+\frac{1}{\overline{2n+7}\times\overline{2n+8}}x^3 \text{ \&c.} = f.$$

si multiplicetur hæc series per $x-1$, hinc orietur nova series

$$-\frac{1}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+2}}+\frac{8n+10}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+2}\times\overline{2n+3}\times\overline{2n+4}}x+\frac{8n+18}{\overline{2n+3}\times\overline{2n+4}\times\overline{2n+5}\times\overline{2n+6}}x^2+\frac{8n+26}{\overline{2n+5}\times\overline{2n+6}\times\overline{2n+7}\times\overline{2n+8}}x^3$$

&c. $=\overline{x-1}\times f$; pone $x-1=0$, inde concludi poterit, facta translatione termini primi ad alteram Æquationis partem, totoque diviso per 2, fore

$$\frac{4n+5}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+2}\times\overline{2n+3}\times\overline{2n+4}}+\frac{4n+9}{\overline{2n+3}\times\overline{2n+4}\times\overline{2n+5}\times\overline{2n+6}}+\frac{4n+13}{\overline{2n+5}\times\overline{2n+6}\times\overline{2n+7}\times\overline{2n+8}}+\frac{4n+17}{\overline{2n+7}\times\overline{2n+8}\times\overline{2n+9}\times\overline{2n+10}}$$

&c. $=\dfrac{\frac{1}{2}}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+2}}$. Patet igitur summam terminorum quorum numerus est n, in serie a Cl. viro allata, futuram esse $\frac{1}{4}-\dfrac{\frac{1}{2}}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+2}}$,

In eadem pagina duæ aliæ extant Series, quarum prior est
$B=\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{4}{4\times5\times6\times7\times8}+\frac{9}{7\times8\times9\times10\times11}+\frac{16}{10\times11\times12\times13\times14}$ &c. posterior
$C=\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{14}{5\times6\times7\times8\times9}+\frac{55}{9\times10\times11\times12\times13}+\frac{140}{13\times14\times15\times16\times17}+\frac{285}{17\times18\times19\times20\times21}$ &c.

De his autem Seriebus sic scribit Vir Clarissimus

‘ Has Series jam pridem communicavi cum primariis quibusdam ‘ Geometris a quibus minime contemni videntur. Sic ad me scribit peritissimus Geometra D. *Nicolaus Bernoulli* in Epistola data 25° *Julii* ‘ 1716. *Vous me ferez un extreme plaisir, Monsieur, de me communiquer la Solution de votre Probleme, etant donnée une suite de fractions dont*

‘ *dont les Numerateurs soient des nombres figurez quelconques, & dont* ‘ *les Denominateurs soient formez du produit d'un nombre egal de fa-* ‘ *cteurs qui soient en progression arithmetique, trouver la somme, &* ‘ *principalement comment vous avez trouvé ces deux formules*

‘ $\frac{p}{24 \times \overline{4p+1}}$, & $\frac{p \times \overline{p+1}}{12 \times \overline{3p+1} \times \overline{3p+2}}$.

‘ Hæ formulæ spectant ad series *C* & *B*, designante p numerum ‘ terminorum quorum summa requiritur. Sic etiam ad me scribit ‘ D. *Taylor* in Epistola data 22° *Aug.* 1716, *Ut & qua ratione inci-* ‘ *disti in summationem serierum a te exhibitarum, præsertim loquor de* ‘ *serie* $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{4}{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$ *&c. quæ videtur esse altioris indaginis.*

Hactenus vir Clarissimus; nunc videamus quomodo harum Serierum summæ ex Methodo nostra deduci possint, absque ullo Theorematum apparatu, ac primum quidem de seriei signata *B* dicemus.

Illud igitur observandum est terminum quemlibet hujus seriei designari oportere per numerum illum quo locus ejus denotatur, id vero facile fiet subsidio Methodi differentiarum; sit igitur n numerus designans locum termini, porro facile patebit terminum illum sic expressum iri $\frac{nn}{\overline{3n-2} \times \overline{3n-1} \times 3n \times \overline{3n+1} \times \overline{3n+2}}$ sive $\frac{\frac{1}{3}n}{\overline{3n-2} \times \overline{3n-1} \times \overline{3n+1} \times \overline{3n+2}}$, hinc palam est post terminos quorum multitudo est n, orituram hanc Seriem, nimirum

$$\frac{1}{3} \times \frac{n+1}{\overline{3n+1} \times \overline{3n+2} \times \overline{3n+4} \times \overline{3n+5}} + \frac{n+2}{\overline{3n+4} \times \overline{3n+5} \times \overline{3n+7} \times \overline{3n+8}} + \frac{n+3}{\overline{3n+7} \times \overline{3n+8} \times \overline{3n+10} \times \overline{3n+11}} \text{ \&c.}$$

Quoniam vero Denominator quilibet hujus Seriei ex factoribus quatuor constat, quorum bini quique in termino proxime sequente repetuntur, sumatur idcirco series $\frac{1}{\overline{3n+1} \times \overline{3n+2}} + \frac{1}{\overline{3n+4} \times \overline{3n+5}}x + \frac{1}{\overline{3n+7} \times \overline{3n+8}}x^2 + \frac{1}{\overline{3n+10} \times \overline{3n+11}}x^3$ &c. $= s$, cujus bini qui-

que

que factores in singulis Denominatoribus semel tantummodo occurrunt.

Rursus, quoniam in serie data, denominatoris cujuslibet pars ea quæ iterum occurrit, in termino proxime sequente conspicitur; multiplicetur Series data per $x-1$, sin vero ita acciderit ut terminus unus, vel duo, vel plures terminis repetitis interjaceant, fiat congruens multiplicatio seriei datæ per $xx-1$, vel x^3-1 &c. Porro si fiat multiplicatio seriei assumptæ per $x-1$, prodibit series

$$-\frac{1}{\overline{3n+1}\times\overline{3n+2}}+\frac{18n+18}{\overline{3n+1}\times\overline{3n+2}\times\overline{3n+4}\times\overline{3n+5}}x+\frac{18n+36}{\overline{3n+4}\times\overline{3n+5}\times\overline{3n+7}\times\overline{3n+8}}x^2$$
$$+\frac{18n+54}{\overline{3n+7}\times\overline{3n+8}\times\overline{3n+10}\times\overline{3n+11}}x^3 \text{ \&c.} = \overline{x-1}\times s.$$ ponatur nunc $x=1$, deinde fiat translatio primi termini ad alteram Æquationis partem, tum dividantur omnia per 18, hinc exurget

$$\frac{n+1}{\overline{3n+1}\times\overline{3n+2}\times\overline{3n+4}\times\overline{3n+5}}+\frac{n+2}{\overline{3n+4}\times\overline{3n+5}\times\overline{3n+7}\times\overline{3n+8}} \text{ \&c.} = \frac{1}{18\times\overline{3n+1}\times\overline{3n+2}};$$

quapropter si multiplicetur hæc summa per $\frac{1}{3}$, erit summa desiderata $=\frac{1}{54\times\overline{3n+1}\times\overline{3n+2}}$, pone jam $n=0$; hinc exurget summa Seriei *Monmortianæ* in infinitum continuatæ $=\frac{1}{108}$, unde concludi potest summam terminorum, quorum numerus sit n, æqualem futuram esse quantitati $\frac{1}{108}-\frac{1}{54\times\overline{3n+1}\times\overline{3n+2}}=\frac{n\times\overline{n+1}}{12\times\overline{3n+1}\times\overline{3n+2}}$.

Eodem modo, ex Methodo Differentiarum, liquet Numeratorem quemlibet cujus locus in Serie C designatur per n, generaliter expressum iri per quantitatem $\frac{1}{3}\times n\times\overline{2n-1}\times\overline{4n-1}$, Denominatorem vero huic Numeratori competentem per $\overline{4n-3}\times\overline{4n-2}\times\overline{4n-1}\times 4n\times\overline{4n+1}$, adeoque terminum ipsum, diviso tum Numeratore tum Denominatore per $n\times\overline{2n-1}\times\overline{4n-1}$ redigi posse ad $\frac{1}{3}\times\frac{1}{\overline{4n-3}\times 2\times 4\times\overline{4n+1}}$, seu $\frac{1}{24\times\overline{4n-3}\times\overline{4n+1}}$.

Hinc patet seriem C, post terminos quorum numerus designatur per n, evasuram

T $\frac{1}{24}$

$\frac{1}{24} \times \frac{1}{\overline{4n+1}\times\overline{4n+5}} + \frac{1}{\overline{4n+5}\times\overline{4n+9}} + \frac{1}{\overline{4n+9}\times\overline{4n+13}}$ &c.

Scribatur ergo Series

$\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+5}x + \frac{1}{4n+9}xx + \frac{1}{4n+13}x^3$ &c. $= f$. Multiplicetur hæc series per $x-1$, tunc prodibit

$-\frac{1}{4n+1} + \frac{4}{\overline{4n+1}\times\overline{4n+5}}x + \frac{4}{\overline{4n+5}\times\overline{4n+9}}x^2 + \frac{4}{\overline{4n+9}\times\overline{4n+13}}x^3$ &c.

$= \overline{x-1}\times f$; ponatur $x=1$, deinde transferatur terminus primus ad alteram Æquationis partem, dividanturque omnia per 4, tum fiet $\frac{1}{\overline{4n+1}\times\overline{4n+5}} + \frac{1}{\overline{4n+5}\times\overline{4n+9}} + \frac{1}{\overline{4n+9}\times\overline{4n+13}}$ &c. $= \frac{1}{4\times\overline{4n+1}}$ quapropter divisione iterum facta per 24, erit summa desiderata $= \frac{1}{96\times\overline{4n+1}}$, ponejam $n=0$, hinc perspicuum erit summam seriei *C* in infinitum continuatæ æqualem futuram esse quantitati $\frac{1}{96}$, itemque summam terminorum quorum numerus n, æqualem futuram esse quantitati $\frac{1}{96} - \frac{1}{96\times\overline{4n+1}} = \frac{n}{24\times\overline{4n+1}}$.

Ex superioribus igitur liquido constat series istas *Monmortianos* quarum nulla quidem vel Circulum vel Hyperbolam respicit, ex Methodo Subductionis *Bernoullianæ* quam Vir Cl. tanquam a se visam commemorat, vel ex multiplicatione qua utimur nullo negotio deduci posse.

Inter Series a D. *Monmort* allatas, nulla videtur ei plus negotii confecisse quam ea quæ hic subjiciemus, nimirum

$\frac{1}{3\times5\times7} + \frac{2}{4\times6\times8} + \frac{3}{5\times7\times9} + \frac{4}{6\times8\times10}$ &c. cujus terminum cum ille generaliter designasset per $\frac{p}{\overline{p+2}\times\overline{p+4}\times\overline{p+6}}$ post varias transformationes adducit ad

$\frac{-6}{z\times\overline{z+1}\times\overline{z+2}\times\overline{z+3}\times\overline{z+4}} + \frac{-6}{\overline{z+1}\times\overline{z+2}\times\overline{z+3}\times\overline{z+4}} + \frac{-1}{\overline{z+2}\times\overline{z+3}\times\overline{z+4}} + \frac{1}{\overline{z+3}\times\overline{z+4}}$ posito $p=z-2$: quibus confectis ei licuit ope Canonum multo labore comparatorum, summam seriei suæ exhibere.

At vero si fractio $\frac{p}{\overline{p+2}\times\overline{p+4}\times\overline{p+6}}$ in hasce binas resolvatur

$\frac{1}{p+2}$

$\frac{1}{\overline{p+2}\times\overline{p+4}} - \frac{6}{\overline{p+2}\times\overline{p+4}\times\overline{p+6}}$, vel has binas alteras $\frac{1}{\overline{p+4}\times\overline{p+6}} - \frac{2}{\overline{p+2}\times\overline{p+4}\times\overline{p+6}}$, vel denique in has tertias $\frac{1}{\overline{p+2}\times\overline{p+6}} - \frac{4}{\overline{p+2}\times\overline{p+4}\times\overline{p+6}}$; quoquo modo id factum fuerit, patet summam Seriei propositæ ex Subtractione *Bernoulliana*, vel ex nostra multiplicatione, absque ullo previo Canone statim obtentum iri.

Porro, cum magnum fecisse arbitratus sit Vir Cl. quod series eas summaverit quarum termini ita sunt constituti ut eorum Numeratores & Denominatores binas quaslibet lineas transversas Trianguli Arithmeti conficiant, libet hic dispicere quantum ille ea ratione Doctrinam serierum infinitarum promoverit.

Ut exemplis illustret Methodum qua utitur, sibi sumit summandum numerum quemlibet datum terminorum Seriei $\frac{1}{1} + \frac{4}{7} + \frac{10}{28} + \frac{20}{84} + \frac{35}{210}$ &c. cujus Numeratores constituunt lineam quartam transversam, Denominatores vero lineam septimam transversam Trianguli Arithmetici.

Sed ex iis quæ prius nota erant quam hunc locum tractaret Vir Doctissimus, Numerator quilibet, posito n numero terminorum, designari potest per $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, Denominator vero per $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6}$, quo fit ut terminus ipse designetur per $\frac{4\times5\times6}{\overline{n+3}\times\overline{n+4}\times\overline{n+5}}$, poterit igitur summa seriei vel ex subtractione *Bernoulliana*, vel ex multiplicatione nostra facillime deduci.

Novum ponit exemplum desumptum ex Serie $\frac{1}{1} + \frac{7}{4} + \frac{28}{10} + \frac{84}{20} + \frac{210}{35}$ &c. cujus termini sunt terminorum seriei prioris reciproci.

Sed cum terminus hujus Seriei generaliter designari possit per $\frac{\overline{n+3}\times\overline{n+4}\times\overline{n+5}}{4\times5\times6}$, patet summam terminorum quotlibet ex methodo Differentiarum nullo negotio colligi potuisse.

Jam sibi exquirendum sumit Autor quænam sit summa seriei cujus Numeratores constituant lineam quamlibet erectam in Triangulo Arithmetico, Denominatores vero lineam quamlibet transversam, cujus generis est Series $\frac{1}{1} + \frac{5}{4} + \frac{10}{10} + \frac{10}{20} + \frac{5}{35} + \frac{1}{56}$.

TRIANGULUM ARITHMETICUM.

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	&c.
	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	&c.
		1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	&c.
			1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	&c.
				1,	5,	15,	35,	70,	126,	&c.
					1,	6,	21,	56,	126,	&c.
						1,	7,	28,	84,	&c.
							1,	8,	36,	&c.
								1,	9,	&c.
									1,	&c.

SOLUTIO *MONMORTIANA.*

' Designetur ordo lineæ erectæ per p, ordo lineæ transversæ per ' q, & sit m aggregatum tot terminorum primorum in linea erecta ' ordinis $p+q-1$ quot sunt Unitates in $q-1$, atque summa quæ- ' sita erit $\overline{2^{p+q-2}-m} \times \frac{1\times2\times3 \text{ \&c. } \overline{q-1}}{p\times\overline{p+q} \text{ \&c. } \overline{p+q-2}}$.

' In casu proposito est $p=6$, $q=4$, $p+q-1=9$, $q-1=3$; adeo- ' que $m=1+8+28=37$, id est terminis tribus primis lineæ no- ' næ erectæ, unde fit summa quæsita $=\overline{2^8-37}\times\frac{1\times2\times3}{6\times7\times8}=\frac{219}{56}$.

SOLUTIO NOSTRA.

Nos vero Problema generaliter confiemus subsidio quadraturæ facillimæ cujus Exempla plura in superius allatis tradidimus, etenim si termini omnes hujus generis serierum quas hoc loco Vir Cl. sibi summandas sumit, multiplicentur per terminos Seriei indeterminatæ, 1, x, xx, x^3, x^4, x^5, &c. singuli per singulos, tunc retentis symbolis p & q quæ Autor adhibuit, summa evadet

$$\frac{\overline{1+x}|^{p+q-2}\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}\ldots\ldots\times 1}{p\times\overline{p+1}\ldots\ldots\times\overline{p+q-2}} - \frac{q-1}{p}x^{q-2} - \frac{\overline{q-1}\times\overline{q-2}}{p\times\overline{p+1}}x^{q-3}$$

$- \frac{\overline{q-1}\times\overline{q-2}\times\overline{q-3}}{p\times\overline{p+1}\times\overline{p-2}}x^{q-4}$ &c. cujus termini eousque continuari debent, donec eorum numerus fiat æqualis quantitati q; erit igitur summa feriei $1+\frac{5}{4}x+\frac{10}{10}xx+\frac{10}{10}x^3+\frac{5}{35}x^4+\frac{1}{56}x^5$

$$=\frac{\overline{1+x}|^8\times 3\times 2\times 1}{6\times 7\times 8} - \frac{3}{6}x^2 - \frac{3\times 2}{6\times 7}x - \frac{3\times 2\times 1}{6\times 7\times 8}.$$

Atque hæc sunt fere omnia quæ circa has series *Monmortianas* mihi visa fuerint aliqua consideratione digna; unica tamen superest series Viri Cl. quam hic considerare æquum esset, sed cum ea id genus serierum quas autor antea tractaverat non spectet, eam in locum commodiorem transferre satius duxi.

Id vero donec exequamur, non alienum fore arbitror Methodo nostra paulo diutius immorari. Proponatur itaque Series

$$\frac{19}{1\times 2\times 3}\times\frac{1}{4}+\frac{28}{2\times 3\times 4}\times\frac{1}{8}+\frac{39}{3\times 4\times 5}\times\frac{1}{16}+\frac{52}{4\times 5\times 6}\times\frac{1}{32}\ \&c.$$

quam summari oporteat.

Assumatur series $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}xx+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{6}x^5$ &c. $=f$, in qua reperiuntur factores omnes e quibus conflantur Denominatores feriei propositæ: fingantur Multiplicatores bini $ax-b$, itemque $cx-d$ qui in se invicem ducti producant quantitatem $bd-adx-bcx+acxx$ per quam multiplicetur series assumpta; at vero cum series data procedat per potestates fractionis $\frac{1}{2}$, fingere licet $x-\frac{1}{2}=0$, sive $2x-1=0$ suffecerit itaque multiplicatorem unum sumere $ax-b$, posito altero $=2x-1$: præterea cum ex horum multiplicatorum mutuo ductu generetur quantitas $b-ax-2bx+2axx$, multiplicetur series assumpta per productum istud, quo facto emerget series

$$b-\frac{3b+2a}{1\times 2}x+\frac{9a-4b}{1\times 2\times 3}xx+\frac{16a-10b}{2\times 3\times 4}x^3+\frac{25a-18b}{3\times 4\times 5}x^4\ \&c.$$

$=\overline{2x-1}\times\overline{ax-b}\times f$, erit itaque translatione facta,

$9a-4b$

$$\frac{9a-4b}{1\times2\times3}xx + \frac{16a-10b}{2\times3\times4}x^3 + \frac{25a-18b}{3\times4\times5}x^4 \text{ \&c.} =$$

$$\overline{2x-1}\times\overline{ax-b}\times f - b + \frac{3b+2a}{1\times2}x.$$

Comparetur nunc primus terminus hujus Æquationis cum termino primo ſeriei datæ, itemque ſecundus cum ſecundo, hinc erit $9a-4b=19$, atque $16a-10b=28$, unde invenietur $a=3$, $b=2$, quamobrem ſumma ſeriei propoſitæ erit $=1$.

Sed & eadem opera invenietur ſumma ſeriei

$$\frac{19}{1\times2\times3}\times\frac{4}{9} + \frac{28}{2\times3\times4}\times\frac{8}{27} + \frac{39}{3\times4\times5}\times\frac{16}{81} + \frac{52}{456}\times\frac{32}{243} \text{ \&c.}$$

etenim ſi ponatur $ax-b$ ſeu $3x-2=0$. erit jam nunc $x=\frac{2}{3}$, quo fiet ut ſumma ſeriei noviſſimæ evadat $=2$.

Decem abhinc circiter annis, cum ego animi oblectandi gratia ad eruditiſſimum virum D. *Brook Taylor* ſcripſiſſem me poſſe accurate ſummam exhibere ſeriei

$\frac{2}{1\times3}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{3\times5}\times\frac{1}{9} + \frac{4}{5\times7}\times\frac{1}{27} + \frac{5}{7\times9}\times\frac{1}{81}$ &c. pollicens me methodum id conficiendi ei brevi miſſurum, ille poſt lectam epiſtolam, cum exiſtimaret me eodem jure id in me recipere velle ut hanc ſeriem ad poteſtates indeterminatæ quantitatis transferrem, illico reſcripſit ſe pro certo habere me id præſtare non poſſe; ubi vero reſponſum miſerat, mox eſt ſuſpicatus me ſeriem hanc determinaſſe ad poteſtates fractionis $\frac{1}{3}$; quamobrem poſtridie quam illius reſponſum acceperam, epiſtolam novam a Viro Cl. accepi qua ſignificabat ſe ope methodi ſuæ incrementorum ſummam ſeriei meæ reperiſſe; ut ſequitur.

Pone ſummam Seriei æqualem quantitati f, itemque $f=\frac{x}{v}$, tum capiendo incrementa, obtinebitur $\dot{s}=\frac{\dot{x}v-x\dot{v}}{vv'}=t$, poſito t æquali termino ſeriei propoſitæ; jam facta comparatione formulæ iſtius generalis cum ſerie propoſita, id comperietur debere v ſucceſſive reſpondere numeris 1, 3, 5, 7 &c. quapropter fit $\dot{v}=2$; porro ſi z ſucceſſive repreſentet Numeratores 2, 3, 4 &c. inde evadet $v=2z-3$, illud igitur efficietur ut formula in hanc transformetur, nimirum

2zx

$\frac{2z\dot{x}-3\dot{x}-2x}{2z-3\times 2z-2}=t$; pone $n=1$, atque $\dot{x}=\overline{1+r}|^n$; capiantur rursus incrementa, hinc fiet $\dot{x}=r\times\overline{1+r}|^n=rx$, tum substituendo valorem quantitatis $\dot{x}$ in ipsius locum, Numerator formulæ evadet $2rzx-3rx-2x$; at vero in Serie proposita Numeratores dividuntur per z, quamobrem posito $3rx+2x=0$, fiet $r=-\frac{2}{3}$, unde erit $1+r=\frac{1}{3}$, quo fit ut series hinc deducenda eandem formam adipiscatur ac series proposita (ponendo scilicet $n=z-1$) tunc facta multiplicatione per $\frac{3}{4}$ inde emerget $t=\frac{-zx}{2z-3\times 2z-1}=\frac{-z}{2z-3\times 2z-1\times 3^{z-1}}$ atque $f=\frac{3}{4\times 2z-3\times 3^{z-1}}$ (ubi cum signum quantitatis t sit negativum, consequens est ut f denotet summam seriei in infinitum continuatæ,) jam vero pro z scribendo 2 (valorem nempe primi termini) habetur $f=\frac{3}{4\times 1\times 3}=\frac{1}{4}$.

Sub fine Epistolæ rogavit me Vir Cl. ut eum participem facere vellem Methodi meæ quam ego ultro pollicitus eram, cui cum obtemperassem, tertiam misit Epistolam qua me certiorem fecit hanc methodum sibi multum arridere propter ejus simplicitatem, eam ad casus omnes serierum D. *Monmort*, nec non ad casus magis compositos facile accommodari posse: his subjunxit exemplum novum Methodi suæ quam ad casus omnes harum serierum, cum ita acciderit ut eæ accurate summabiles fuerint, nec nimis implicatæ evaserint transferri posse asseruit; sed cum Vir Clarissimus ipse aliquando sit expositurus methodum suam cujus pulcherrima jam dudum edita sunt specimina, de ea plura dicere nunc supersedebimus.

Modus autem quo summam seriei suprascriptæ vel tot ipsius terminorum quot quis assignare voluerit inveneram, is est quem sæpius in exemplum attuli, nempe scribendo seriem

$$\frac{n+2}{2n+1\times 2n+3}x^{n+1}+\frac{n+3}{2n+3\times 2n+5}x^{n+2}+\frac{n+4}{2n+5\times 2n+7}x^{n+3}$$

&c. $=f$, orituram post terminos n; etenim si assumatur series

$$\frac{1}{2n+1}x^n+\frac{1}{2n+3}x^{n+1}+\frac{1}{2n+5}x^{n+2}+\frac{1}{2n+7}x^{n+3}\ \text{\&c.}$$

fiatque multiplicatio seriei assumptæ per. $3x-1$, propter x determinatam ad

ad valorem $\frac{1}{3}$, orietur series

$$-\frac{1}{2n+1}x^n+\frac{4n+8}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+3}}x^{n+1}+\frac{4n+12}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+5}}x^{n+2}$$

$+\frac{4n+16}{\overline{2n+5}\times\overline{2n+7}}x^{n+3}$ &c. $=\overline{3x-1}\times f$, unde translato primo seriei termino ad alteram Æquationis partem, totoque diviso per 4, invenietur summa seriei datæ $=\frac{1}{4\times\overline{2n+1}\times 3^n}$, evanescente $\overline{3x-1}\times f$ propter x restrictam ad $\frac{1}{3}$ ex Hypothesi: hinc ponendo $n=0$, exurget summa seriei infinitæ incipientis a termino $\frac{2}{1\times 3}\times\frac{1}{3}$, æqualis fractioni $\frac{1}{4}$, adeoque summa terminorum quorum numerus datus est n, evadet $\frac{1}{4}-\frac{1}{4\times\overline{2n+1}\times 3^n}$.

At vero si in Serie proposita, in locum potestatem fractionis $\frac{1}{3}$ substituantur potestates indeterminatæ x, idque requiratur inveniendum quænam tum futura sit summa seriei datæ, Problema propter repetitos Denominatores solvi poterit per Multiplicationem, ad hunc modum: assumpta utique serie.

$\frac{1}{2n+1}x^n+\frac{1}{2n+3}x^{n+1}+\frac{1}{2n+5}x^{n+2}+\frac{1}{2n+7}x^{n+3}$ &c. $=f$, multiplicetur ea per $ax-b$; hinc emerget Æquatio

$$\frac{\begin{matrix}2na+3a\\-2nb-b\end{matrix}\,x^{n+1}}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+3}}\;\frac{\begin{matrix}+2na+5a\\-2nb-3b\end{matrix}\,x^{n+2}}{\overline{2n+3}\times\overline{2n+5}}\text{ \&c. }=\overline{ax-b}\times f+\frac{b}{2n+1}x^n,$$ tum

facta comparatione termini primi seriei genitæ, cum termino primo seriei datæ, hoc est cum termino primo eorum quos posuimus orituros post numerum n, hoc est cum termino

$\frac{n+2}{\overline{2n+1}\times\overline{2n+3}}x^{n+1}$, inde emergent Æquationes binæ, nimirum $2na-2nb=n$, atque $3a-b=2$; erit igitur $a=\frac{3}{4}$, b vero $=\frac{1}{4}$; ergo

go summa seriei post terminos n oriturae erit $\frac{3x-1}{4}\times f+\frac{1}{4\times 2n+1}x^n$, quae quidem dabitur modo f detur; pone $n=0$, tunc Series data evadet $\frac{2}{1\times 3}x+\frac{3}{3\times 5}xx+\frac{4}{5\times 7}x^3+\frac{5}{7\times 9}x^4$ &c. at vero f hoc in casu evadit $=1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}xx+\frac{1}{7}x^3$ &c. $=\frac{1}{2\sqrt{x}}\log.\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ erit igitur summa seriei datae, $=\frac{3x-1}{8\sqrt{x}}\times\log.\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{4}$.

Proponatur Series $\frac{19}{1\times 2\times 3}xx+\frac{28}{2\times 3\times 4}x^3+\frac{39}{3\times 4\times 5}x^4+\frac{52}{4\times 5\times 6}x^5$ &c. quam summari oporteat.

Assumatur Series $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}xx+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4$ &c. $=f$, multiplicetur series assumpta per trinomium $a+bx+cxx$, inde erit series genita

$\frac{2a+3b+6c}{1\times 2\times 3}xx+\frac{6a+8b+12c}{2\times 3\times 4}x^3+\frac{12a+15b+20c}{3\times 4\times 5}x^4$ &c.

$=\overline{a+bx+cxx}\times f-a-\frac{1}{2}ax-bx$. Fiat comparatio terminorum seriei genitae cum terminis seriei propositae, hinc orientur tres Æquationes $2a+3b+6c=19, 6a+8b+12c=28, 12a+15b+20c=39$, quarum ope invenientur $a=2$, $b=-7$, $c=6$: erit igitur summa desiderata $=\overline{2-7x+6xx}\times f-2+6x$: jam si vis ut irrationalitas tollatur, pone $2-7x+6xx=0$, hinc elicietur valor duplex quantitatis x, nempe $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$; quapropter si x restringatur ad valorem $\frac{1}{2}$, erit summa seriei $=1$: sin vero x restringatur ad valorem $\frac{2}{3}$, tunc erit summa seriei $=2$.

Eodem modo si proponatur series

$\frac{5}{1\times 2\times 3}x^2+\frac{10}{2\times 3\times 4}x^3+\frac{17}{3\times 4\times 5}x^4+\frac{26}{4\times 5\times 6}x^5+\frac{37}{5\times 6\times 7}x^6$ &c. tum assumpta serie $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}xx+\frac{1}{4}x^3$ &c. $=f$, summa seriei propositae invenietur $=\overline{1-x+xx}\times f-1+\frac{1}{2}x$; jam si ponatur $1-x+xx=0$, valores quantitatis x erunt impossibiles, adeoque summa serie propositae in nullo casu poterit rationalis evadere.

U LIBER



LIBER VII.

Responsio ad quasdam Criminationes.

CAPUT I.



ANno 1710, Liber Gallice conscriptus de Ludis, cui Titulus, *Essay d'Analyse sur les jeux de bazard*, Cl. Viro Domino *Monmort* autore, evulgatus fuit; is cum forte incidisset in manus Nobilissimi Viri Domini *Franc. Robartes* quem omnes tum in humanioribus literis, tum in Mathematica versatissimum agnoverunt, hac data occasione, Viro Cl. placuit Problemata quædam ad idem argumentum spectantia, sed multo difficiliora quam ulla quæ solverat Dominus *Monmort* mihi proponere; rogavitque ut si quid novi mihi occurreret quod adeo facile ex *Huygenii* methodo non flueret, id prioribus vellem adjungere, principiaque exponerem in quibus eorum solutio niteretur; quæ cum satis feliciter confecissem, ea omnia Vir Cl. ad Societatem Regiam ultro deferre dignatus est, eaque commendare tanquam digna quæ lucem viderent, utpote quæ complecterentur speculationem non tam ad ludos spectantem quam dirigendæ menti in exquirenda veritate inservientem. Hinc factum fuit ut Tractatus de iis exscriptus, Titulo adhibito *De Mensura Sortis*, ex Regiæ Societatis mandato, *Actis Philosophicis* pro Mensibus Jan. Feb. Mart. 1711, interpositus fuerit.

Non eo animo Librum Domini *Monmort* inspexeram ut quidquam in eo reprehenderem: Problemata quæ uterque nostrum solvimus non ideo solveram quia ea solverat Vir Doctissimus, aut quod ea solvere non potuissem quin illius vestigiis institissem, sed ea mihi sumpseram solvenda ob id solummodo quod proposita fuerant, non vero soluta, a Clarissimo *Huygenio* summo Mathematico quem ego semper colui, & ex cujus scriptis me multum profecisse libenter agnovi. Illud autem ingenue fatebor, me postquam hæc *Huygenii* Problemata

mata abſolviſſem, modum ſolutionis meum cum *Monmortiano* contuliſſe, quos adeo diſſimiles inter ſe deprehendi, ut ne minimum quidem ſuſpicari potuerim cuiquam in mentem venturum me Cl. Viri adjumento indiguiſſe. Cum vero nulla extaret cauſa cur quid de his rebus ſentirem declarare non auderem, præterire non poteram quin dicerem me eum non probare ſolutionis modum quo uſus fuerat D. *Monmort*, ſed ne durus in illum viderer, id protinus addideram eum *Huygenii* methodum variis Exemplis pulchre illuſtraſſe. Poſt hæc Cl. Viro nihil amplius laudis in toto libro tribueram, non quod fortaſſe amplius non meruerit, ſed quod mihi aliis occupationibus diſtento ſatis otii non ſuppeteret ut in id inquirerem quouſque erat laudandus.

Adeo conſcius mihi eram me ea agendi ratione Domino *Monmort* diſplicere non potuiſſe, ut cum ad Illuſtriſſimum Abbatem *Bignonum* quem Literati omnes venerantur, librum meum miſiſſem; hanc gratiam a digniſſimo viro impetraveram ut Exemplar alterum quod ſuo adjunxeram Domino *Monmort* mihi tunc ignoto reddi in ſe reciperet.

Anno 1713 Dom. *Monmort* librum ſuum denuo edidit; cum vero in ſecunda Editione plura reperirentur quæ prior Editio non habuerat, eam ad me mitti curaverat, hanc comitabantur literæ quibus ſignificabat ſe in ea ſpe eſſe, me eam pluris facturum quam priorem feceram. In hac editione inſeruerat Epiſtolam ad Dom. *Nic. Bernoulli* qua ipſe ſententiam ſuam de libro meo exponebat; jam vero cum ea quæ ibi erant animadverſa aditum præbeant rebus quibuſdam quæ cum jucunditatem tum utilitatem lectoribus parere poſſint, non ingratum iis futurum fore exiſtimavi, ſi ea breviter recenſerem quæ in libro meo maxime animadverſione digna Vir Cl. deprehenderat.

I. Conqueritur me Problemata quædam ſolviſſe quæ ipſe ante ſolverat; id tamen fatetur, ſolutiones meas ſuis fuiſſe generaliores.

II. Affirmat Problemata quæ ego ſolveram, quæque non ſoluta erant in Libro ſuo, ſoluta tamen fuiſſe in literis quæ inter ipſum & Dom. *Nic. Bernoulli* interceſſerant, unde illud colligit D. *Bernoulli* nihil novi in libro meo reperturum, niſi fortaſſe quod modus ſolutionis quo utor *ſæpe ſit novus, ſemperque elegans & ingenioſus.*

III. Obſervat Lemma quoddam a me adhibitum quod ſibi placere faſſus eſt ex libro ſuo depromptum fuiſſe, *quanquam quidem in ejus libro non extiterit*; ſed cum paulo poſt editum hunc librum, hoc ipſiſſimum Lemma a ſe ad Clariſſimum Virum D. *Johannem Bernoulli* miſſum fuiſſe dicat, ſatis inde apparere putat me ex eo-

dem fonte illud hausisse atque ipse hauserat, nimirum ex iis quæ habuerat in pagina 141. primæ Editionis libri sui.

IV. Fatetur me ingeniose solutionem Problematis mei quinti ad Solutiones Sexti & Septimi: sed id scire cupit num Problema istud quintum potuisset alio modo solvi.

V. Dicit Methodum serierum infinitarum, quam ego ad solutionem plurium Problematum adhibueram, sibi notam fuisse, hancque potuisse a se usurpari si libuisset, quod ut ostendat, memorat solutionem Problematis cujusdam a se confecti per seriem infinitam quam non summaverat: addit me si quid novi depromere voluissem, id mihi pensi dare debuisse ut hanc seriem *quam neque ille neque ullus forte mortalium summare poterat* mihi summandam sumpsissem.

VI. Me temeritatis arguit quod asseruerim Problema quoddam de sorte solvi potuisse Methodo Serierum infinitarum, cum sibi constaret id fieri non posse.

VII. Fatetur me solvisse Problema quod ille non attigerat; dicit tamen illud fere unicum fuisse quod a ipso fuerat prætermissum.

VIII. Concedit me generaliter solvisse Problema de Duratione Ludorum, cujus ipse casum unicum eumque *Simplicissimum* solverat; sed monet se primum de hoc argumento cogitasse, addit præterea se quidem illud affirmasse, casus omnes alios utcunque compositos facile solutum iri eadem methodo quam adhibuerat ad solutionem casus supradicti; at vero id nunc sibi compertum dicit Solutionem Problematis generalis non esse facilem, etiamsi in auxilium arcessas seriem istam quæ solutioni primi casus inservierat.

IX. Miratur unde mihi exorta fuerit solutio ista præcedentis Problematis; profitetur se valde eam comprobare, nec dissimulat totum librum sibi placuisse: sibi gratulatur quod ipse mihi occasionem suppeditaverit illum edendi; id quidem notatu dignum existimat quod ego illic congesserim ea ipsa quæ ab ipso & D. *Nic. Bernoulli* in suis literis *nondum editis* tractata fuerant, attamen Vir. Cl. id mirari definit, dum secum reputat librum meum ad libri sui imitationem scriptum fuisse, quo factum fuit ut in eam cogitandi viam perductus fuerim quam ille primus ingressus erat; quapropter id æquum futurum fuisse censet ut ea pro suis agnovissem quæ ipse jure sibi vendicare poterat.

Ut librum Cl. Viri accepi, ad eum scripsi me de dono suo plurimas ei agere gratias, ac fateri me sibi obstrictum quod aliqua mihi concesserat quæ mihi laudi essent, de cæteris vero quæ in me reprehenderat me non posse in ejus opinionem adduci; ex eo tempore

pore mihi cum illo intercessit familiaritas, & alter ad alterum frequentes dedimus literas; cumque ad eum scripsissem me penes me habere methodum serierum qua quædam præstare possem quæ vix methodus ulla alia attingeret, ille sic rescripsit literis datis 26. Mart. 1715. *Maximo teneor desiderio videndi ex nova Editione tui Libri Methodum qua uteris ad summationem serierum de quibus mentionem facis in tuis literis; quod de eis narras multam expectationem in me gignit, interim mitto tibi series aliquot quæ quidem genere a tuis differunt, sed quæ fortasse tibi probabuntur: eas impertivi Dom.* Nic. Bernoulli *literis heri ad ipsum scriptis.*

Series autem quas Vir Cl. miserat ex earum genere erant quas Unitate determinatas vocavi; his adjuncta quidem erat series unica diversi generis de qua me dicturum jam antea promisi, quicquid autem de his Vir Cl. ad me misit id diligenter adservo cum principio, fine, partibus intermediis, & pagella quæque numero suo distincta.

Paucis post diebus quam hæc scripta erant, novas accepi literas datas Lutetiæ 17 Ap. 1715. quibus me certiorem faciebat se iter in Angliam facturum, seque postero die in viam daturum, arrepta inde occasione quod sibi itineris socium adjunxisset Dom. *Abbatem Conti*; non autem ideo susceptum esse iter ut Eclipsin nobis futuram totalem videret, sed ut Viros Doctrina conspicuos ac præsertim *Newtonum* inviseret: postquam Londinum advenit, in eum omne officium meum & studium contuli, habuit me comitem, interpretem, ductorem; apud *Newtonum* aliosque doctos viros admissus est, urbaniter ab iis exceptus, tandemque Societati Regiæ annumeratus.

Ubi Lutetiam rediit, scripsit se in memoria semper habiturum tot beneficia in se collata, seque semper paratum fore ea quo ad poterit rependere.

Ex eo tempore scribere intermisimus, occupatus erat Vir Cl. in expoliendis eis seriebus quas ad me miserat, quo eas digniores redderet quæ Typis mandarentur, ego vero parabam secundam Editionem Libri mei: vix deerat folium unicum quominus totus liber impressus esset, cum mihi in cœtum Societatis Regiæ advenienti in conspectum se dedit Liber Actorum pro Mensibus Jul. Aug. Sept. hinc titulum præ se ferens *De seriebus Infinitis Tractatus, Pars Prima, Autore* Petro Raymond de Monmort, *R. S. S. una cum Appendice & Additamento per Dom.* Brook Taylor, *R. S. Secr.* Tractatum hunc insperatum, adeo tempestive editum, avide pervolutavi; sed cum perciperem vix in eo quidquam inesse præter id quod ego prius videram, si exceperis Appendicem, Additamentum, & Seriem unicam Cl. *Nic.* *Ber-*

Bernoulli; ab ulteriore harum ſerierum inſpectione in præſenti deſtiti, quippe quæ ad argumentum libri mei non pertinerent.

Ut primum ſecunda Editio libri me in lucem exiit, eam ad D. *Monmort* miſi qui de ea gratias egit.

Biennium ferme elapſum erat ex quo librum miſeram, cum Vir Clariſſimus quem ego valde diligebam e vita exceſſit, hoc quidem eò graviori dolore me affecit quod in eam ſpem veneram fore ut ſi quæ ſuſpiciones in animo ejus hærerent, eas aliquando adimerem, at vero non licuit ea ſpe diutius frui. Paulo poſt Viri Cl. obitum, Elogium ejus a Doctiſſimo & Officioſiſſimo viro D. *Fontenelle* contextum in lucem prodiit, cum vero quædam me ſpectantia ibi contineantur, ea hic ponenda cenſui. Verba ſic leguntur.

' *Apres le Livre de Mr.* Monmort, *il en parut un en Angleterre* ' *ſur la même matiere, intitulé* de Menſura Sortis, *il eſt de Mr.* Moivre ' *fameux Geometre que la France a droit, puis qu'il eſt François, de* ' *revendiquer ſur l'Angleterre, dailleurs fort riche; je ne diſſimuleray que Mr.* Monmort *fut vivement piqué de cet ouvrage qui lui* ' *parut avoir été fait ſur le Sien, & d'apres le Sien; il eſt vray qu'il* ' *y etoit loué, & n'étoit ce pas aſſez dira-t'on, mais un Seigneur de* ' Fief *n'en quittera pas pour des louanges celui qu'il pretend lui devoir* ' *foi & hommage des Terres qu'il tient de lui; je parle ſelon ſes pre-* ' *tenſions, & ne decide nullement s'il étoit Seigneur.*

Quod adeo honorificam mentionem Vir Clariſſimus de me fecerit, id inter maxima beneficia ſemper habui, & quidem pluribus abhinc annis Cl. *Varignonum* literis rogaveram ut verbis meis virum de me tam bene meritum vellet ſalutare, eique meo nomine de ſua erga me Benevolentia plurimas agere gratias.

Sed cum celeberrimus Elogii autor videatur in ea eſſe opinione D. *Monmort* id ægre tuliſſe quòd ego de eodem argumento ſcripſiſſem, ingenue fateor me multa difficultate implicari; etenim dum accurate perluſtro omnes Domini *Monmort* in librum meum animadverſiones, non mihi apparet librum illum ei quidpiam moleſtiæ attuliſſe, ſibi contra gratulatur ſe mihi occaſionem præbuiſſe illum edendi: dicit quidem Vir Clariſſimus æquitatem id poſtulaſſe ut ea pro ſuis agnoviſſem quæ ipſe ſibi jure vendicare poterat; ſed hæc verba, meo quidem judicio, nihil aliud declarant quam placidi hominis ſententiam de Æquitatis norma, nec quidquam ægritudinis, nedum iræ, de injuria quaquam ſibi illata innuere videntur; nec erat cur Vir clariſſimus mihi ſuccenſeret, non in me poſitum erat ut eum læderem, ſibi licebat querelas ſuas deferre ad judices, qui de jure Dominii, de

de conditione Obsequii, de lege Clientelæ, de Laudibus pro Tributo solvendis brevi statuissent.

Attamen id negare nolim quin etsi nulla fuerit justa causa cur Vir Cl. mihi illo tempore succenseret, nec ullibi appareat se in malam partem accepisse ea quæ de Sorte scripseram, potuerit tamen Editio nova libri mei indignationem ejus movisse, ni enim iratus fuisset, qui poterat Vir Cl. eas omnes revocare concessiones quas mihi adeo benigne largitus erat; dixerat me Problemata quædam generalius solvisse quam ea ipse solverat; istud quidem erat aliquid concedere, dixerat modum meum solutionis sæpe esse novum, at semper elegantem & ingeniosum; agnoverat me Problema quoddam solvisse quod ipsum fugerat, alia passim concedit quæ jam recensere non vacat, at vero post vulgatam secundam Editionem libri *de Sorte*, nihil quidquam mihi reliquit de possessionibus antea concessis, dixerat quidem librum *de Sorte* ad sui imitationem scriptum fuisse (*sur le Sien*) dixerat se mihi ansam præbuisse ut de eodem argumento scriberem, at postea amicis insusurrat me librum meum ad Exemplar quod mihi ob oculos posuerat scripsisse, & lineam e linea expressisse (*sur le Sien & d'apres le Sien*) quo factum fuit ut in omnia mea jus Dominii habuerit, quæ quidem verba non poterant nisi ab indignatione proficisci.

Quid autem Virum Cl. impulerat ut erga me animum mutaret conjectura non satis assequi valeo, nisi fortasse id sit, quod cum nihil aliud a me requisiisset quam ut ea pro suis agnoscere vellem quæ sua esse contendebat, idque cum æquitas postularet, tum amicitia inter nos inita necessario exigeret, non ei tamen visus fuerim huic officio satisfecisse, meque, qua erat opinione imbutus, iniquiorem quam antea deprehenderit. His accedit quod cum Vir Cl. in introductione ad secundam Editionem Libri sui, paginas totas septuaginta & amplius implevisset Methodo Differentiarum, Arte Combinatoria & Demonstratione sua Lemmatis a me primum prolati, quod quidem sibi placere fassus erat, sed sibi detractum crediderat, Methodus Differentiarum in secunda Editione Libri mei fuerit a me adhibita eadem prorsus fiducia ac si in eam mihi fuisset jus cum illo commune; artem vero combinatoriam in usum meum sumpserim, principiaque simplicissima exposuerim e quibus hujus Artis Regulæ derivari potuissent, tandemque Lemma meum, suppressa Demonstratione rursus in medium protulerim, ne verbo quidem unico facto de Cl. Viri jure: hæc & plura posthac memoranda Cl. Virum in me fortasse accenderant.

Quam-

Quamvis autem ex debita comparatione eorum quæ de eodem Argumento uterque noſtrum ſcripſimus, ſatis colligi poſſit qualis ſententia de Criminationibus Cl. Viri ferenda ſit, attamen cum ſecunda Editio mea anglico ſermone conſcripta fuerit, quo fit ut non adeo multi ſint qui noſtra cum ſuis conferre valeant, non alienum eſſe duxi præcipua quædam ex nova Editione noſtra excerpere quæ cum iis quæ de eodem argumento Vir Cl. ſcripſit comparari poſſint: quod accuſationes attinet quæ in primam Editionem cadunt, eas mihi poſtponere viſum eſt, utpote quæ nec me valde ſollicitum teneant, nec adeo mihi neceſſe videatur ut de iis me purgem; attamen pauca fortaſſe de eis attingam quibus poſſit Lectoris judicium aliquatenus juvari.

CAPUT II.

De Methodo Differentiarum.

NON mihi conſtitutum eſt Hiſtoriam ſcribere de Ortu & Progreſſu Methodi Differentiarum; ſatis mihi fuerit animadvertere hanc Methodum ſumma cum perſpicuitate & brevitate a Clariſſimo *Newtono* in ſuo Principiorum Libro jam primum Anno 1687. in lucem edito expoſitam fuiſſe, hanc utique tradit Vir Præſtantiſſimus in Lemmate 5° Lib. 3. ubi Problema ſolvitur de deſcribenda Curva generis Parabolici quæ per data quotcunque puncta tranſeat, ſive fuerint Intervalla Ordinatarum æqualia, ſive inæqualia; cum vero ſolutio primi caſus eò recidat, ut data ſerie numerorum ad æqualia intervalla poſitorum, aſſignetur in ea ſerie terminus quivis cujus intervallum a primo ſeriei termino datum ſit, hanc ſolutionem mihi viſum eſt huc transferre, nulla fere alia adhibita mutatione quam ea quæ oriatur a mutatis quantitatum nominibus. Solutio autem, ut facilius ad numeros accommodetur ſic poterit enunciari.

Subtrahatur terminus quiſque Seriei a proximo inſequenti, vocenturque termini reſidui primæ differentiæ; deinde ſubtrahatur differentia quæque prima a proxima inſequenti, reſiduæque differentiæ vocentur differentiæ ſecundæ; ſubtrahatur itidem differentia quæque ſecunda a proxima inſequenti, reſiduæque differentiæ vocentur differentiæ tertiæ, & ſic deinceps; ſit a primus ſeriei terminus, d' prima primarum differentiarum, d'' prima ſecundarum, d''' prima tertiarum

rum &c. ſit x intervallum inter primum Seriei terminum & terminum quæſitum; tum erit terminus quæſitus

$$a + \frac{xd'}{1} + \frac{x \times \overline{x-1}}{1\times 2} d'' + \frac{x\times\overline{x-1}\times\overline{x-2}}{1\times 2\times 3} d''' + \frac{x\times\overline{x-1}\times\overline{x-2}\times\overline{x-3}}{1\times 2\times 3\times 4} d''''$$

&c. quæ Series hoc differt a *Newtoniana* quod quantitates $\frac{d''}{1\times 2}$, $\frac{d'''}{1\times 2\times 3}$, $\frac{d''''}{1\times 2\times 3\times 4}$ &c. hic uſurpatæ ponantur a *Newtono* d'', d''', d'''' &c.

COROLLARIUM I.

Ex hoc *Newtoni* Lemmate id facile colligitur, terminum quemlibet Seriei datæ accurate determinatum iri, ſi ita acciderit ut differentiæ omnes alicujus ordinis tandem evaſerint æquales.

COROLLARIUM II.

Hinc deducere licet ſummas terminorum quotcunque harum Serierum; etenim hæ ſummæ conſtituunt novam Seriem terminorum quorum differentiæ primæ ſunt termini ipſi Seriei datæ, primo excepto, atque adeo nihil aliud requiritur ad ſummas inveniendas quam ut aſſignetur terminus cujus locus datus ſit in Serie ſummarum; ſint exempli gratia a, b, c, d &c. termini ſeriei datæ; hinc erunt a, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$ &c. termini conſtituentes ſummarum Seriem cujus differentiæ primæ ſunt b, c, d &c. quapropter ſi ſeponatur terminus primus Seriei datæ, dein colligantur differentiæ primæ, ſecundæ, tertiæ &c. orituræ poſt primum terminum, ſit que d' prima primarum, d'' prima ſecundarum, d''' prima tertiarum &c. $x+1$ numerus terminorum, tum fiet ſumma terminorum

$$a + xb + \frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}d + \frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}\times\frac{x-2}{3}d' + \frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}\times\frac{x-2}{3}\times\frac{x-3}{4}d'' \text{ \&c.}$$

etenim eſt a primus terminus in Serie ſummarum, in eadem Serie eſt b prima primarum differentiarum, d' prima ſecundarum, d'' prima tertiarum, & ſic porrò.

Horum autem Demonſtratio elici poteſt ex prima Propoſitione Methodi Differentialis Cl. *Newtoni* quæ una cum quibuſdam aliis ſcriptis ejuſdem Autoris in lucem prodierant Anno 1711, cura peritiſſimi Mathematici mihique amicitia conjunctiſſimi D. *W. Jones:* hæc igitur ſi mihi quando contigerit in uſum adjungere, facile concedetur id meo jure facere potuiſſe.

COROLLARIUM III.

Proprietates omnes eorum numerorum qui figurati appellantur ex superiore Lemmate sua sponte fluunt: quin etiam summæ potestatum numerorum quotlibet ad intervalla æqualia positorum, & summarum summæ, & harum novæ summæ in infinitum, ope hujus Theorematis investigari poterunt; quod ut exemplis pateat, pone id requiri ut summæ numerorum naturalium ab Unitate incipientium, & ad numerum quemcunque datum pertingentium assignetur, istud ope Canonis suprascripti confici poterit ad hunc modum.

Pone numeros naturales a nihilo seu Cyphra incipere, quod quidem habet aliquid commodi, nihil autem necessitatis, etenim eo pacto fiet ut operatio qua summa determinatur aliquanto contractior evadat quam si ab Unitate inciperetur, tunc sumptis differentiis, invenietur $a=0$, $b=1$, $d'=1$, $d''=0$, proindeque summa quæ generaliter designatur per Canonem $a+xb+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}d'$, in hoc speciali casu evadet $x+\frac{xx-x}{2}=\frac{xx+x}{2}=\frac{x}{1}\times\frac{x+1}{2}$; cum vero $x+1$ denotet numerum terminorum inter quos Cyphra locum obtinet, consequens est ut Cyphra adempta, numerus terminorum relictus futurus sit $=x$, erit igitur summa numerorum ab Unitate incipientium, quorumque multitudo designatur per x, $=\frac{x}{1}\times\frac{x+1}{2}$.

Exponatur nunc x in generali hac summarum expressione sigillatim per numeros naturales 1, 2, 3, 4 &c. hinc orientur numeri vulgo Triangulares appellati, seu ut quidam volunt numeri tertii ordinis, nimirum 1, 3, 6, 10, 15 &c. quorum summa nunc requiratur.

Cum statim appareat duos esse casus quibus effici possit ut expressio $\frac{x}{1}\times\frac{x+1}{2}$ evadat æqualis nihilo, nempe cum sumitur $x=0$, vel $x=-1$, ponamus idcirco quantitatem x in expressione suprascripta ordinatim exponi per numeros -1, 0, 1, 2, 3, 4 &c. inde emergent numeri 0, 0, 1, 3, 6, 10, 15 &c. qui omnes tanquam Triangulares habendi sunt, jam vero cum priores duo termini nihilo sint æquales, hinc sequitur Canonem qua summa designatur ita decurtatum iri ut is ad terminos duos ultimos restringatur, quapropter ne verbis diutius immoremur, sufficecerit oculis subjicere sequens Diagramma.

$a=0$

$a = 0$

$b = 0$

```
            1 = d
    1            1 = d''
          2
    3            1
          3
    6            1
          4
    10
```

erit igitur summa desiderata $= \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-1}{3} = \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x+1}{3}$. at vero est $x+1$ multitudo terminorum inter quos numerantur duæ Cyphræ, quapropter abjectis Cyphris, multitudo terminorum reliquorum erit $x-1$, atque adeo si jam velis ut x exponat multitudinem terminorum ab Unitate incipientium, erit summa desiderata $= \frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2} \times \frac{x+2}{3}$ qua generantur numeri Pyramidales seu quarti ordinis. Libet casum unum amplius addere.

Exponantur iterum x in superiore Pyramidalium expressione ordinatim per numeros naturales, idque requiratur ut assignetur summa numerorum inde nascentium.

Quod ut expeditius fiat, observandum est tres esse casus quibus efficitur ut productum $\frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2} \times \frac{x+2}{3}$ futurum sit æquale nihilo, nempe cum ita accidit ut x sit vel -2, vel -1, vel -0, quapropter numeri geniti omnes 0, 0, 0, 1, 4, 10, 20 &c. tanquam Pyramidales habendi sunt, atque adeo terminus Canonis primus, secunds, itemque differentiæ omnes ex hac numerorum Serie deduci poterunt, quemadmodum id fit in sequenti Diagrammate:

$a = 0$

$b = 0$

```
        0 = d'
    0       1
        1       1 = d''
    1       2       1 = d'''
        3       1
    4       3       1
        6       1
    10      4
        10
    20
```

cum vero sit $a=0$, $b=0$, $d'=0$, $d''=1$, $d'''=1$, consequens est ut summa ex generali Canone elicita sit

$$\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}\times\frac{x-2}{3}+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}\times\frac{x-2}{3}\times\frac{x-3}{4}=\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}\times\frac{x-2}{3}\times\frac{x+1}{4}.$$

Insuper cum $x+1$ semper in Canone designet cum terminorum numerum quorum summa requiritur, cumque inter numeros quorum summam exhibuimus tres reperiantur Cyphræ, sequitur fore ut si excludantur Cyphræ, numerus terminorum relictus designabitur per $x-2$; quapropter si jam velis ut numerus terminorum, abjectis Cyphris, denominetur per x, palam est scribendum esse x loco $x-2$, quo fiet ut summa desiderata evasura sit $\frac{x}{1}\times\frac{x+1}{2}\times\frac{x+2}{3}\times\frac{x+3}{4}$.

Et prius dictis satis liquet, si requiratur summa terminornm ordinis cujusvis per numerum n designati, hanc assignare licere per formulam $\frac{x}{1}\times\frac{x+1}{2}\times\frac{x+2}{3}\times\frac{x+3}{4}\times\frac{x+4}{4}$ &c. ad tot factores continuatam quot sunt Unitates in n, posito x numero terminorum quorum summa requiritur.

Pone nunc id requiri ut summa quadratorum ex numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c. genitorum assignetur, hanc consequi poterimus sequenti operatione,

$$\begin{array}{lll} a=0 & & \\ & 1 & \\ b=1 & & \\ & 3=d' & \\ 4 & & 2=d'' \\ & 5 & \\ 9 & & 2 \\ & 7 & \\ 16 & & \end{array}$$

$$\text{Summa } a+xb+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}d'+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}\times\frac{x-2}{3}d''.$$

$$=0+0+\frac{xx-x}{2}\times3+\frac{x^3-3xx+2x}{6}\times2=\frac{2x^3+3xx-5x}{6}$$

$=\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}\times\frac{2x-1}{3}$; at vero est $x+1$ numerus terminorum inter quos Cyphra locum obtinet, proindeque, abjecta Cyphra, erit x numerus terminorum ab Unitate incipientium, atque adeo summa quadra-

dratorum ex numeris 1, 2, 3, 4 &c. genitorum quorumque multitudo designatur per x, erit $\frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2} \times \frac{2x+1}{3}$.

COROLLARIUM IV.

Si detur quantitas ex pluribus partibus conflata, & utcunque composita ex indeterminata x, & quantitatibus datis, qualis Ex. gratia $3x^3+2xx-5x+6$, atque in ea interpreteris x sigillatim per terminos progressionis arithmeticæ cujuscunque, dein, in unum colligas terminos omnes quantitatis datæ sigillatim oriundos ex unaquaque interpretatione quantitatis x, ita ut inde conficiatur series terminorum sive crescentium sive decrescentium, assignabitur in hac Serie terminus quilibet cujus intervallum a primo termino datum sit, & summa terminorum hujus Seriei itidem assignabitur.

Methodus quam hactenus exposui ea ipsa est qua usus fueram in Editione anglica *de Sorte*, quamque Cl. *Newtono* adscripseram: attamen non desunt aliæ Methodi quibus summationem harum Serierum consequi liceat, modo detur generalis expressio terminorum Seriei, inter quas nulla melior reperietur quam ea quæ fuit adhibita a D. *Nic. Bernoulli* in Epistola ad D. *Monmort* data 26 Feb. 1711, quam ille patruo suo D. *Joh. Bernoulli* debitam refert, hanc exemplo uno vel altero explicare, gratum fore lectoribus plane confido; pone igitur id requiri ut summa quadratorum ex numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c. inveniatur.

Sit x numerus terminorum, erit igitur xx expressio generalis ejus termini cujus locus in Serie quadratorum designatur per x; assumatur expressio generalis summæ $Ax^3 + Bxx + Cx$ quæ ita constitui debet ut assumpta Scala potestatum x^3, xx, x, cujus maximus index semper Unitate superet maximum indicem quantitatum quarum summa requiritur, cujusque minimus index ad Unitatem deveniat, multiplicentur partes Scalæ per Coefficientes A, B, C, D &c. quæ jam sint determinandæ: quod ut fiat, in expressione generali summæ scribatur $x+1$ loco x, hinc summa evadet,

$$\begin{array}{llll} Ax^3 & +3Axx & +3Ax & +A \\ & +Bxx & +2Bx & +B \\ & & +Cx & +C \end{array}$$

e qua si prior summa subtrahatur, relinquitur

$$\begin{array}{lll} 3Axx & +3Ax & +A \\ & +2Bx & +B \\ & & +C \end{array}$$

quæ

quæ utique æqualis erit quadrato ex $x+1$, nempe $xx+2x+1$, etenim si ex summa quadratorum quorum numerus sit $x+1$, subtrahatur summa quadratorum quorum numerus sit x, manet quadratum unicum cujus locus designatur per $x+1$: facta itaque comparatione terminorum, erit $3A=1$, seu $A=\frac{1}{3}$, $3A+2B=2$, unde $B=\frac{2-3A}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$, $A+B+C=1$, unde $C=1-A-B=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. erit igitur summa desiderata $=\frac{2x^3+3xx+x}{6}=\frac{x}{1}\times\overline{\frac{x+1}{2}}\times\overline{\frac{2x+1}{3}}$.

Eodem modo si requiratur summa quadratorum ex numeris a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ &c. hanc itidem obtinere licebit; etenim sit x numerus terminorum; ille igitur terminus in Serie quadratorum cujus locus designatur per $x+1$, erit $aa+2adx+ddxx$, quamobrem facta comparatione terminorum, invenietur $A=\frac{1}{3}dd$, $B=\frac{2ad-dd}{2}$, $C=aa-ad+\frac{1}{6}dd$, proinde summa desiderata erit

$$\frac{1}{3}ddx^3+\overline{ad-\frac{1}{2}dd}\times xx+\overline{aa-ad+\frac{1}{6}dd}\times x.$$

atque eodem modo ad casus altiores procedere licet.

COROLLARIUM V.

Series qua usi sumus ad inveniendas summas quantitatum quarum differentiæ evadant ultimò æquales, poterit mutari in aliam nec minus elegantem nec minus commodam, immò hoc fortasse priore commodiorem, quod relatio inter se termini cujuslibet in Serie assignati, & summæ terminorum eò melius conspici poterit.

Ut vero facilis ad hanc Seriem pateat via, nihil magis requiritur quam ut comparentur differentiæ primæ singulorum ordinum, cum eorumdem ordinum differentiis primis, prout differentiæ illæ ortum suum ducunt vel a primo Seriei termino, vel a secundo; etenim sint D', D'', D''', D'''' &c. differentiæ primæ singulorum ordinum, quales ex desumuntur a primo Seriei termino, itemque sint d', d'', d''', d'''' &c. differentiæ primæ eorumdem ordinum quales eæ desumuntur a secundo; quo posito illud statim percipietur esse $d'=D'+D''$, $d''=D''+D'''$, $d'''=D'''+D''''$ &c. adeoque si in Serie qua Summæ exhibentur, nimirum

A

$A + xb + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} d' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} d'' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times \frac{x-3}{4} d'''$ &c. pro d', d'', d''' &c. scribantur earum valores, atque pro b scribatur $A + D'$, tunc Seriem istam in hanc alteram mutatum iri

$$\overline{x+1} \times A + \frac{x+1}{1} \times \frac{x}{2} D' + \frac{x+1}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3} D'' + \frac{x+1}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3} \times \frac{x-2}{4} D'''$$

&c. sive $\frac{x+1}{1} \times \overline{A + \frac{x}{2} D' + \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3} D'' + \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3} \times \frac{x-2}{4} D'''}$ &c.

quod patet Diagrammate hic subjecto.

$$A = A$$

$$x b = x A + x D'$$

$$\frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} d' = \qquad \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} D' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} D''$$

$$\frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} d'' = \qquad \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} D'' + \&c.$$

sed $A + x A = \overline{x+1} \times A$, & $x D' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} D' = \frac{x+1}{2} \times \frac{x}{2} D'$, & $\frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} D'' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} D'' = \frac{x+1}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3} D''$. &c.

Hinc illud deducere proclive est.

Si ex Serie qualibet data cujus termini inter se referantur secundum legem quamcunque datam, decerpantur termini quilibet dati, a primo Seriei termino ad intervalla data positi, approximatio fieri poterit ad summam terminorum omnium proximis intervallis, seu unitate, inter se distantium, a primo ad ultimum; quæ approximatio eo accuratior erit quo plures termini sumentur.

Exempli gratia, dentur quatuor termini E, F, G, H; sint a, b, c, distantiæ secundi, tertii, quarti a primo; tum fingantur termini isti desumi ex Serie quadam terminorum sibi proximorum cujus tertiæ differentiæ sint inter se æquales, atque esse D' prima primarum differentiarum, D'' prima secundarum, D''' prima tertiarum, initio omnium facto ab E; quo constituto, tot obtinebuntur Æquationes, quot sunt termini dati, uno dempto; hæ autem sic prodibunt

$$F = E + aD' + \frac{a}{1} \times \frac{a-1}{2} D'' + \frac{a}{1} \times \frac{a-1}{2} \times \frac{a-2}{3} D'''$$

$$G = E + bD' + \frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} D'' + \frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} \times \frac{b-2}{3} D'''$$

$$H = E + cD' + \frac{c}{1} \times \frac{c-1}{2} D'' + \frac{c}{1} \times \frac{c-1}{2} \times \frac{c-2}{3} D'''$$

Nunc ope ternarum Æquationum suprapositarum, collige singulos valores differentiarum D', D'', D''', qui valores si pro differentiis scribantur in Serie qua summa terminorum exprimitur, nempe in

$\overline{x+1}$

$\overline{x+1} \times \overline{E + \frac{x}{2}D' + \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3}D'' + \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3} \times \frac{x-2}{4}D'''}$ &c. posito intervallo $x=c$, orietur expreſſio ſummæ quæſitæ ex datis terminis & datis intervallis.

Si hac ratione formentur Canones ad ſummas terminorum deſignandas, ii etiam inſervire poterunt quadrandis Curvis quæ per puncta quotcunque data tranſeant, quod ut exemplo uno oſtendatur, repetatur Regula a nobis allata, in extremo Capite quarto Lib. V. quæ huc ſpectabat, ut ex hæc datis terminis tribus A, B, C ad intervalla æqualia poſitis, ſumma terminorum extremis interjacentium, una cum extremis aſſignaretur; ſumma autem iſta, poſito p intervallo inter A & B, itemque inter B & C, reperta fuerat $= \frac{2p+1}{6p} \times \overline{\overline{p+1} \times \overline{A+C} + \overline{4p-2} \times B}$; finge nunc p eſſe infinitam, hinc obtinebitur Area interjacens extremis Ordinatis A & C quæ utique ſic prodibit $\frac{\overline{A+C} \times p + 4Bp}{3}$, jam ſi vis ut intervallum inter extremas Ordinatas nominetur q, Area erit $\frac{A+C+4B}{6}q$, modus autem ille reperiendi quadraturas mechanicas eaſdem ſuppeditat concluſiones quas, ſua uterque methodo, ſeorſim invenerunt viri Doctiſſimi *Coteſius* & *Sterlingius*.

Ex iis quæ ex Serie *Newtoniana* fluunt, pauciſque deinceps addendis, facile deducetur Methodus inveniendi ſummam Seriei cujuſdam de qua nos dicturos jam antea promiſimus; hanc non demonſtratam ad me miſerat D. *Monmort*, ea autem continebat Solutionem ſequentis Problematis quod his verbis Vir Cl. propoſuerat.

PROBLEMA.

Invenire ſummam Seriei fractionum quarum Numeratores creſcant juxta progreſſionem Seriei cujuſlibet numerorum figuratorum, vel generalius, numerorum differentiam conſtantem habentium, quarumque Denominatores conſtituant progreſſionem quamlibet Geometricam.

SOLUTIO *MONMORTIANA.*

Sit $\frac{m}{1}$ ratio Denominatorum, ſit a primus terminus Seriei quam Numeratores efficiunt; ſint b, c, d, e &c. differentiæ primæ, ſecundæ,

dæ, tertiæ hujus Seriei, cum est summa Seriei infinitæ

$$\frac{a}{m-1} + \frac{b}{\overline{m-1}|^2} + \frac{c}{\overline{m-1}|^3} + \frac{d}{\overline{m-1}|^4} + \frac{e}{\overline{m-1}|^5} \text{ \&c.}$$

Qui autem Scire cupit quomodo Series ista ab Autore fuerit demonstrata, consulat Prop. IX. Tractatus ejus de Seriebus infinitis

Interim nos Methodo Autoris non adstricti, Seriem suprascriptam sic demonstrare aggrediemur.

D. *Jacobus Bernoulli* investigaverat summam Seriei infinitæ $1+2r+3rr+4r^3+5r^4$ &c. cujus Coefficientes constituunt Seriem numerorum naturalium, hancque deprehenderat æqualem quantitati $\frac{1}{\overline{1-r}|^2}$.

II. Invenerat summam Seriei infinitæ $1+3r+6rr+10r^3$ &c. cujus Coefficientes sunt numeri Triangulares, æqualem esse quantitati $\frac{1}{\overline{1-r}|^3}$.

III. Invenerat summam Seriei infinitæ $1+4r+10rr+20r^3$ &c. cujus Coefficientes sunt numeri Pyramidales, æqualem esse quantitati $\frac{1}{\overline{1-r}|^4}$, & sic deinceps.

Modus autem quo Vir Cl. has conclusiones erat assecutus, cum multum habeat simplicitatis & elegantiæ, eum hoc loco describere visum est.

Principium sumit a Progressione geometrica $1+r+rr+r^3+r^4+r^5$ &c. cujus summa, ut vulgo notum est, æqualis est fractioni $\frac{1}{1-r}$.

Cum igitur sit $1+r+rr+r^3+r^4+r^5 \text{ \&c.} = \frac{1}{1-r}$

ea de causa, erit $r+rr+r^3+r^4+r^5 \text{ \&c.} = \frac{r}{1-r}$

$$rr+r^3+r^4+r^5 \text{ \&c.} = \frac{rr}{1-r}$$

$$r^3+r^4+r^5 \text{ \&c.} = \frac{r^3}{1-r}$$

$$r^4+r^5 \text{ \&c.} = \frac{r^4}{1-r}$$

$$r^5 \text{ \&c.} = \frac{r^5}{1-r}$$

Hinc illud deducit quod cum ſummæ omnium Columnarum quæ ad ſiniſtram Æquationis partem ponuntur, conſtituant progreſſionem numerorum naturalium $1+2r+3rr+4r^3+5r^4+6r^5+7r^6$ &c. Numeratores vero terminorum ad dextram poſitorum conſtituant progreſſionem geometricam $= \frac{1}{1-r}$, atque Denominator horum terminorum communis ſit $=1-r$, conſequens ſit ut ſumma Seriei $1+2r+3rr+4r^3$ &c. in infinitum continuatæ æquale ſit fractioni $\frac{1}{\overline{1-r}|^2}$.

Eodem modo ſi ſumantur Series

$$1+2r+3rr+4r^3+5r^4+6r^5+7r^6 \text{ \&c.} = \frac{1}{\overline{1-r}|^2}$$

$$1r+2rr+3r^3+4r^4+5r^5+6r^6 \text{ \&c.} = \frac{r}{\overline{1-r}|^2}$$

$$1rr+2r^3+3r^4+4r^5+5r^6 \text{ \&c.} = \frac{rr}{\overline{1-r}|^2}$$

$$1r^3+2r^4+3r^5+4r^6 \text{ \&c.} = \frac{r^3}{\overline{1-r}|^2}$$

$$1r^4+2r^5+3r^6 \text{ \&c.} = \frac{r^4}{\overline{1-r}|^2}$$

$$1r^5+2r^6 \text{ \&c.} = \frac{r^5}{\overline{1-r}|^2}$$

$$1r^6 \text{ \&c.} = \frac{r^6}{\overline{1-r}|^2}$$

perſpicuum eſt ſummas Columnarum quæ ad ſiniſtram ponuntur conſtituere Seriem Trigonalium, ſummam vero terminorum ad dextram conſtituere progreſſionem geometricam, eſt igitur ſumma Seriei trigonalis $1+3r+6rr+10r^3+15r^4+21r^5+28r^6$ &c. $= \frac{1}{\overline{1-r}|^3}$.

eodem modo ad caſus cæteros pergere licet.

Ex quibus poſitis, facile erit elicere Inventionem Cl. *Monmort.* Etenim ſi ſtatuatur p denotare intervallum inter primum terminum, & terminum quemvis alium progreſſionis geometricæ

$1+r$

$1 + r + rr + r^3 + r^4 + r^5$ &c. tunc terminus ille cujus intervallum a primo eſt p, deſignabitur per r^p. & terminus quivis Seriei naturalium $1 + 2r + 3rr + 4r^3 + 5r^4 + 6r^5$ &c. deſignabitur per pr^p; & terminus quilibet Seriei Trigonalium $1 + 3r + 6rr + 10r^3 + 15r^4 + 21r^5$ &c. deſignabitur per $\frac{p}{1} \times \frac{p+1}{2} r^p$, ſicque deinceps, quæ quidem concluſiones jam fuerunt antea demonſtratæ.

Sit igitur Series $A + Br + Crr + Dr^3 + Er^4$ &c. ita conſtituta ut ultimæ Coefficientium differentiæ d', vel d'' vel d''', evadant tandem inter ſe æquales.

Jam ex Methodo differentiarum patet hujus Seriei terminum quemvis, cujus intervallum a primo deſignatur per p, generaliter expreſſum iri per $r^p \times \overline{A + pd'r + \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} d''rr + \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} d'''r^3}$ &c. inde fit ut ſi gradatim interpreteris p per terminos progreſſionis arithmeticæ, 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c. Series data diſſolvi poſſit in has alias.

$$
\begin{aligned}
A + Ar + Arr + Ar^3 + Ar^4 + Ar^5 \text{ \&c.}\\
dr + 2d'rr + 3d'r^3 + 4d'r^4 + 5d'r^5 \text{ \&c.}\\
+ 1d'rr + 3d''r^3 + 6d'r^4 + 10d'r^5 \text{ \&c.}\\
+ 1d''r^3 + 4d''r^4 + 10d''r^5 \text{ \&c.}\\
+ 1d'''r^4 + 5d'''r^5 \text{ \&c.}\\
+ d''''r^5 \text{ \&c.}
\end{aligned}
$$

Sed ex antea demonſtratis, ſumma primæ Seriei $= \frac{A}{1-r}$, ſumma ſecundæ $= \frac{d}{\overline{1-r}|^2}$, ſumma tertiæ $= \frac{d'}{\overline{1-r}|^3}$, & ſic deinceps, atque adeo ſumma omnium erit

$$\frac{A}{1-r} + \frac{d'r}{\overline{1-r}|^2} + \frac{d'rr}{\overline{1-r}|^3} + \frac{d''r^3}{\overline{1-r}|^4} + \frac{d'''r^4}{\overline{1-r}|^5} \text{ \&c.}$$

jam ſi hæc ſumma multiplicetur per r, deinde ponatur $r = \frac{1}{m}$, tum loco differentiarum d', d', d'', ſubſtituantur literæ b, c, d, hinc emerget Theorema *Monmortianum*.

Atque hoc quidem Theorema fuerat a me summa cum laude memoratum, in Editione anglica Libri *de Sorte*, & Autori suo nominatim adscriptum; quin etiam ut æquitatis leges omni ex parte explerem, illud jam pridem a Cl. Viro acceptum ingenue agnoveram, attamen id animadvertere, mihi licere credideram, methodum hanc assequendi summas Serierum adminiculo differentiarum inter limites arctissimos contineri, eamque, utut elegantem, casum esse particularem methodi a me antea expositæ de Seriebus recurrentibus.

Etenim si sumatur Series quantitatum *A, B, C, D, E &c.* talis ut earum unaquæque genita sit ex quantitate qualibet algebraica ex termino uno vel pluribus constante, & utcunque conflata ex quantitatibus datis & indeterminata x quam interpretatus fueris per terminos progressionis arithmeticæ cujuslibet; tum fit ut quantitates genitæ omnes ita ad antecedentes referantur, ut relationis Scala constet ex terminis Binomii $1-1$ ad potestatem eam evecti quam designat index altissimus indeterminatæ x unitate auctus, primo termino hujus potestatis resecto, mutatisque signis reliquorum: Exempli causa, si sumatur quantitas Algebraica $3xx+4x+2$, in eaque exponatur indeterminata x per terminos progressionis arithmeticæ 1, 2, 3, 4, 5 *&c.* hinc conficietur Series terminorum

A B C D E

9, 22, 41, 66, 97 *&c.* quorum relationis Scala, propter altissimum indicem 2 invenietur attollendo Binomium $1-1$ ad Cubum, at vero Cubus ille est $1-3+3-1$; quapropter resecto primo termino, mutatisque signis reliquorum, orietur relationis scala $3-3+1$, quo fiet ut terminus quisque, qualis *v. g.* D ad antecedentes tres sic referatur ut futurus sit $D=3C-3B+A$, atque eodem modo, $E=3D-3C+B$. & sic deinceps. Porro data relationis Scala, invenire licet summam progressionis $9+22r+41rr+66r^3+97r^4$ *&c.* in infinitum continuatæ, quod satis liquet ex iis quæ habuimus in Lib. 4°; Præterea si Series numerorum ita sit constituta ut eorum differentiæ quædam, primæ, vel secundæ, vel tertiæ tandem evadant inter se æquales, argumento est hos numeros necessario originem suam ducere ab expressione quadam algebraica ejus naturæ quam antea descripsi; unde perspicuum est nihil a Theoremate *Monmortiano* præstari posse quod non facile deducatur ex generaliori Methodo relationum: sed nisi relatio terminorum ea sit quam supra exposui, frustra tentares summam serierum consequi ope Theorematis a Cl. viro allati; etenim extra limites hos arctissimos a me definitos, nunquam eveniet ut differentiæ terminorum cujusquam Seriei possint evadere inter se æquales, attamen sive differentiæ evaserint æquales, sive secus acciderit, summam consequi licebit methodo nostra.

Non

Non modo D. *Monmort* invenerat fummam Seriei infinitæ $A+Br+Crr+Dr^3+Er^4$ &c. cum ita accidit ut Coefficientium differentiæ quædam evadant inter fe æquales, fed quod rei Caput eft, invenerat fummam terminorum quorum numerus datus fit; fed cum ea quæ de hac re attulerat Vir Clariffimus fubobfcura videantur, fortaffe propter nimiam feftinationem qua ufus fuerat in defcribendis Seriebus fuis quæ ad tempus conftitutum in lucem proditurae effent, non alienum erit hoc loco oftendere quomodo iftud confici poffit eadem methodo differentiarum quam antea adhibuimus: fit igitur n numerus ille terminorum quorum fumma requiritur, A primus Seriei terminus, d' prima primarum differentiarum, d'' prima fecundarum, d''' prima tertiarum &c. itemque fit Qr^n terminus Seriei oriundus poft illum terminorum numerum qui defignatur per n; fit præterea D' prima primarum differentiarum exurgentium poft terminum Qr^n, D'' prima fecundarum, D''' prima tertiarum; quibus pofitis, ex antea demonftratis perfpicuum eft fummam Seriei incipientis a termino Qr^n, atque in infinitum pergentis, fore $r^n \times \frac{Q}{1-r} + \frac{D'r}{\overline{1-r}|^2} + \frac{D''rr}{\overline{1-r}|^3} + \frac{D'''r^3}{\overline{1-r}|^4} + \frac{D''''r^4}{\overline{1-r}|^5}$ &c. fed ex Methodo differentiarum, eft

$$Q = A + nd' + \frac{n\times n-1}{1\times 2}d'' + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}d''' \text{ \&c.}$$

$$D' = d' + nd'' + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}d''' \text{ \&c.}$$

$$D'' = d'' + nd''' \text{ \&c.}$$

$$D''' = d''' \text{ \&c.}$$

&c.

quapropter erit fumma Seriei infinitæ orituræ poft eum terminorum numerum qui defignatur per n, æqualis quantitatibus

$$r^n \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{1-r} + \frac{nd'}{1-r} + \frac{\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}d''}{1-r} + \frac{\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}d'''}{1-r} \text{ \&c.} \\ \quad + \frac{rd'}{\overline{1-r}|^2} + \frac{nrd''}{\overline{1-r}|^2} + \frac{\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}rd'''}{\overline{1-r}|^2} \text{ \&c.} \\ \quad\quad + \frac{rrd''}{\overline{1-r}|^3} + \frac{nrrd'''}{\overline{1-r}|^3} \text{ \&c.} \\ \quad\quad\quad + \frac{r^3d'''}{\overline{1-r}|^4} \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

Jam

Jam si termini omnes Seriei infinitæ cujus summa requirebatur, multiplicentur per r, ita ut Series quæ posita fuerat
$A+Br+Crr+Dr^3+Er^4+Fr^5$ &c. nunc evadat
$Ar+Brr+Cr^3+Dr^4+Er^5+Fr^6$ &c. tunc facto $r=\frac{1}{m}$, summa Seriei orituræ post eum terminorum numerum quem n designat, poterit exprimi per

$$\frac{1}{m^n}\times\left\{\begin{array}{l}\frac{A}{m-1}+\frac{nd}{m-1}+\frac{\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}d'}{m-1}+\frac{\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}d''}{m-1}\ \&c.\\ \quad+\frac{d}{\overline{m-1}^{2}}+\frac{nd'}{\overline{m-1}^{2}}+\frac{\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}d''}{\overline{m-1}^{2}}\ \&c.\\ \qquad+\frac{d'}{\overline{m-1}^{3}}+\frac{nd''}{\overline{m-1}^{3}}\ \&c.\\ \qquad\quad+\frac{d''}{\overline{m-1}^{4}}\ \&c.\end{array}\right.$$

In hac summa pone $n=0$, hinc obtinebis summam Seriei infinitæ orituræ post terminos quorum numerus nullus sit, sive, summam totius Seriei infinitæ incipientis a primo termino Ar, quæ ideo erit $\frac{A}{m-1}+\frac{d}{\overline{m-1}^{2}}+\frac{d''}{\overline{m-1}^{3}}+\frac{d''}{\overline{m-1}^{4}}+\frac{d'''}{\overline{m-1}^{5}}$ &c. jam si e summa Seriei totius infinitæ, subtrahatur summa Seriei orituræ post eum terminorum numerum quem designat n indeterminate sumptus, relinquetur summa quæsita, nimirum summa terminorum quorum numerus sit n; jam ut forma hujus summæ contractior evadat, pone

$$\frac{m^n-1}{m-1}=S,\ \frac{S-n}{m-1}=T,\ \frac{T-\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}}{m-1}=V,\ V-\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}=X,$$

&c. tunc summa quæsita redigetur ad

$$\frac{1}{m^n}\times\left\{\frac{m^n-1}{m-1}A+\frac{S-n}{m-1}d+\frac{T-\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}}{m-1}d'+\frac{V-\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}d''}{m-1}\right.$$

&c.

De hac Serie autem non alienum erit observare eam inventam fuisse a D. *Nic. Bernoulli* atque ab eo sine demonstratione missam ad D. *Monmort* qui eam mirifice laudibus extulerat, nec immerito;

to; sed cum primus ejus terminus qualis a Cl. Viro afferur gravi præli lapsu laboret, etenim loco fractionis $\frac{m^n - 1}{m - 1}$ scriptum erat $\frac{m - 1}{m - 1}$, hinc factum fuit ut hæc Series nullo modo potuerit intelligi nisi ab iis qui eam suo Marte investigare poterant; quapropter Viros Clarissimos orandos censeo qui rem Mathematicam pulchris suis inventis adornant, ut si quam solutionem ii dederint symbolis maxime refertam, eadem opera dignentur eam juvare sermone vulgari, nec verbis parcant, ut quantum fieri possit, Verba & Symbola sibi mutuam lucem affundere valeant.

His subjungere visum est Seriem valde concinnam quæ tanquam Corollarium ex Serie superius allata, vel ex Methodo nostra Serierum recurrentium, vel ex Methodo D. *Jac. Bernoulli*, vel ex Methodo Fluxionum facile deducitur; hæc autem eò spectat ut assignetur summa terminorum quotlibet Seriei emergentis ex divisione Unitatis per potestatem $\overline{1 - r}|^p$, cum ita accidit ut p sit numerus integer; sit igitur n numerus ille quo designatur multitudo terminorum quorum summa requiritur, tunc exhibebitur summa quæsita per Fractionem

$$\frac{1 - r^n - nr^n \times \overline{1 - r} - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} r^n \times \overline{1 - r}|^2 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} r^n \times \overline{1 - r}|^3}{\overline{1 - r}|^p} \text{ \&c.}$$

cujus Numerator ad tot terminos continuatur quot sunt Unitates in $p + 1$; vel per Fractiones

$$\frac{1 - r^n}{\overline{1 - r}|^p} - \frac{nr^n}{\overline{1 - r}|^{p-1}} - \frac{\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} r^n}{\overline{1 - r}|^{p-2}} - \frac{\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} r^n}{\overline{1 - r}|^{p-3}} \text{ \&c.}$$ quarum multitudo designatur per p.

Hanc autem Seriem sub alia forma prolatam jampridem invenerat D. *Nic. Bernoulli*, eadem methodo dissolutionum qua usus fuerat patruus ejus D. *Jac. Bernoulli*; circa quam observat Vir Cl. rem maxime notatu dignam, hanc scilicet, quod si fuerit $r = 1$, quo fit ut Denominatores evadant nihilo æquales, poterit tamen hoc in casu summa Seriei assignari.

Sumit ille in Exemplum Seriem $1 + 3r + 6rr + 10r^3 + 15r^4$ &c. ad tot terminos continuatam quot sunt unitates in n; cujus summam sub hac forma exhibet, nimirum

$$\frac{2 - \overline{nn + 3n + 2} \times r^n + \overline{2nn + 4n} \times r^{n+1} - \overline{nn + n} \times r^{n+2}}{2 - 6r + 6rr - 2r^3}.$$

tum

tum ex Regula tradita a D. *Johanne Bernoulli* quam in Tractatu Cl. Hospitalii *de infinite parvis pag*. 145. videre est, dividit Fluxionem, seu ut loquitur, Differentiam Numeratoris per Differentiam Denominatoris, atque post eandem operationem ter repetitam, devenit tandem ad expressionem $\frac{n^3+3nn+2n}{6}$, seu $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ qua summa designatur.

Quanquam vero Regula Cl. viri sit optima, primaque, quod sciam, quæ ad hanc rem tradita fuerit; attamen in casu proposito, eandem conclusionem aliquanto expeditius obtinere licebit ponendo $1-r=z$: etenim eo pacto, expressio summæ evadit $\frac{1-\overline{1-z}|^{n}-nz\times\overline{1-z}|^{n}-\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}zz\times\overline{1-z}|^{n}}{z^3}$, jam si loco potestatis $\overline{1-z}|^{n}$, scribatur ejus valor $1-nz+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}zz-\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}z^3$ &c. tum illico comperietur fractionem suprascriptam mutatum iri in hanc alteram $\frac{\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}z^3+\frac{n-1\times n\times n+1\times n+2}{8}z^4}{z^3}$ &c. seu $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}+\frac{n-1\times n\times n+1\times n+2}{8}z$ &c. sed termini omnes post $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ multiplicantur per z, hoc est per nihilum, adeoque omnes evanescent, quapropter relinquetur summa desiderata $=$ $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$, & sic de cæteris.

De Serie oriunda ex divisione Unitatis per potestatem $\overline{1-r}|^{p}$, illud etiam observari poterit: si sumantur termini omnes locorum imparium, itemque termini omnes locorum parium, Series infinita ex terminis locorum imparium confecta, eam rationem habebit ad Seriem confectam ex terminis locorum parium quæ est summæ $\overline{1+r}|^{p}+\overline{1-r}|^{p}$, ad differentiam $\overline{1+r}|^{p}-\overline{1-r}|^{p}$, quod ut ostendatur; in expressione $\frac{1}{\overline{1-r}|^{p}}$ pone $\overline{1-r}|^{p}=0$ atque $rr=z$, erit igitur $\overline{1-\sqrt{z}}|^{p}=0$; hinc $\sqrt{z}=1$, seu $z=1$, proinde $1-rr=0$; divide $1-rr$ per $1-r$, quotiens erit $1+r$, quapropter $\frac{\overline{1-rr}|^{p}}{\overline{1+r}|^{p}}=\overline{1+r}|^{p}$,

adeo-

adeoque Series locorum imparium, erit ad Seriem locorum parium in ea ratione quam habet summa locorum imparium, in potestate expansa Binomii $\overline{1+r}|^p$, ad summam locorum parium in eadem potestate; sed hæ summæ, ut notum est, eam rationem inter se habent quæ est summæ $\overline{1+r}|^p + \overline{1-r}|^p$ ad differentiam $\overline{1+r}|^p - \overline{1-r}|^p$, ergo constat Propositio.

COROLLARIUM.

Si ponatur $r=1$, summa infinita prioris Seriei, erit ad summam infinitam posterioris in ratione æqualitatis, nec tamen ideo sequitur differentiam harum Serierum futuram fore nullam, (si exceperis casum illum unicum quo p restringitur ad unitatem) immò differentia erit infinite magna, & eum habebit infinitatis gradum quem denotat $p-1$; Ex. gratia, si sumatur Progressio arithmetica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c. quæ dividatur in binas Series 1, 3, 5, 7 &c. 2, 4, 6, 8 &c. in quarum utraque multitudo terminorum sit n, palam est harum differentiam esse $=n$, finge nunc n esse infinitam, differentia igitur erit infinite magna, & habebit simplicem infinitis gradum, at si sumatur Series Trigonalium, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 &c. quæ dividatur in binas alteras, 1, 6, 15, 28 &c. 3, 10, 21, 36 &c. harum differentia erit $nn+n$, facta ut prius n multitudine terminorum, pone nunc n esse infinitam, hinc fiet ut differentia Serierum habitura sit duplicatum infinitatis gradum, eademque est ratio de cæteris.

Si Series quælibet numerorum Ordinis cujuscunque, sive Trigonalium sive Pyramidalium &c. dividatur in Series trinas quæ sigillatim constituantur ex quartis quibusque terminis Seriei datæ, initio cujusque novæ Seriei ordinatim facto a primo, secundo, tertio Seriei datæ termino, Series illæ novæ erunt inter se in ratione æqualitatis, cujus demonstratio hinc desumi potest, quod si Trinomium $1+r+rr$, ad potestatem quamlibet attollatur, tres summæ ex quartis quibusque terminis oriturae erunt inter se æquales, modo r restringatur ad Unitatem, eadem vero analogia in infinitum usque porrigitur.

Hæc sunt fere omnia quæ de hac Methodo Differentiarum dicere constitueram; hoc tamen monendum censeo, nisi in ea tractanda maxima cautio aut singularis solertia adhibeatur, totum illud quod hac via consequaris ad conclusiones parum utiles redactum iri, etenim

nim cum ultimæ illæ differentiæ, quæ ponuntur esse inter se æquales, vel ad æqualitatem proxime accedere, a principio Seriei sunt valde remotæ, necesse erit ut Series vulgari differentiarum Methodo comparata vel ad terminos adeo multos producatur ut labor inde oriundus vix ferri possit, vel quod pejus est, ut termini Seriei magis magisque a veritate aberrent: huic autem incommodo remedium invenit eximius Mathematicus D. *Jac. Stirling* qui Methodum excogitavit brevi in vulgus exituram qua quidquid difficultatis in hac re occurrit omnino resecat; hoc vero donec fiat, non injucundum Lectori fore credidi si ei impertirem solutionem elegantissimam quam Vir Cl. Methodo Differentiarum consequutus est de invenienda in Binomio permagno rationem mediæ Coefficientis ad summam Coefficientium omnium; hanc Solutionem ut primum mecum communicavit, eum rogavi ut sineret me eam publici juris facere, cui ille comiter assensus est, & eam aliquanto fusius exponere libenter suscepit, quod fecit Epistola quam hic subjicio.

QUadrienium circiter abhinc, *vir Cl.* cum significarem D. *Alex. Cuming* Problemata de Interpolatione & Summatione Serierum aliaque ejus generis quæ sub Analysi vulgo recepta non cadunt, solvi posse per Methodum Differentialem *Newtoni*; respondit Illustrissimus vir se dubitare an Problema a Te aliquot ante annos solutum de invenienda Uncia media in quavis dignitate Binomii solvi posset per Differentias. Ego dein curiositate inductus, & confidens me viro de Mathesi bene merito gratum facturum, idem libenter aggressus sum: & fateor ortas esse difficultates quæ impediere quominus ad optatam conclusionem confestim pervenire potuerim, sed laboris haud piget, siquidem tandem assecutus sim solutionem adeo tibi probatam ut digneris eam propriis tuis scriptis inserere. Ea vero sic se habet.

Si Index Dignitatis sit numerus par, appelletur n; vel si sit impar, vocetur $n-1$; eritque ut Uncia media ad summam omnium ejusdem Dignitatis, ita unitas ad medium proportionale inter semicircumferentiam Circuli & Seriem sequentem

$$n + \frac{A}{2\times\overline{n+2}} + \frac{9B}{4\times\overline{n+4}} + \frac{25C}{6\times\overline{n+6}} + \frac{49D}{8\times\overline{n+8}} + \frac{81E}{10\times\overline{n+10}} \ \&c.$$

Exempli gratia, si quæratur ratio Unciæ mediæ ad summam omnium in Dignitate centesima vel nonagesima nona, erit $n=100$, qui ductus in

in semiperipheriam Circuli, 1.5707963279 producit A primum terminum Seriei: dein erit $B = \frac{1}{204}A$, $C = \frac{9}{416}B$, $D = \frac{25}{636}C$ &c. atque perficiendo computum ut in margine, invenietur summa Terminorum 157.866984459, cujus Radix quadrata 12.5645129018 est ad unitatem ut summa omnium Unciarum ad mediam in Dignitate centesima, vel ut summa omnium ad alteram e mediis in Dignitate nonagesima nona.

157.079632679
769998199
16658615
654820
37137
2734
246
26
3
157.866984459

Problema etiam solvitur per reciprocam illius Seriei, etenim summa omnium Unciarum est ad Unciam mediam in subduplicata ratione semiperipheriæ Circuli ad Seriem $\frac{1}{n+1} + \frac{A}{2\times\overline{n+3}} + \frac{9B}{4\times\overline{n+5}} + \frac{25C}{6\times\overline{n+7}} + \frac{49D}{8\times\overline{n+9}} + \frac{81E}{10\times\overline{n+11}}$ &c. vel quod eodem redit, ponatur $a = .6366197723676$, quoto scilicet qui prodit dividendo unitatem per semiperipheriam Circuli; & media proportionalis inter numerum a, & hanc Seriem, erit ad unitatem, ut Uncia media ad summam omnium.

Ut si sit $n = 100$ ut antea, computus erit ut in margine vides, ubi summa terminorum prodit .0063344467087 cujus Radix quadrata .0795892373872 est ad unitatem ut Uncia media ad summam omnium in Dignitate centesima vel nonagesima nona.

.00630316606304
3059789351
65566915
2553229
143473
10470
934
98
12
1
.00633444670787

Sunt & aliæ Series pro Solutione hujus Problematis æque simplices ac eæ hactenus allatæ, sed paulo minus convergentes, ubi Index Binomii est numerus exiguus.

Cæterum in praxi non opus est recurrere ad Series; nam sufficit sumere mediam proportionalem inter semicircumferentiam Circuli & $n + \frac{1}{2}$; hæc enim semper approximabit propius quam duo primi Seriei termini, quorum etiam primus solus plerumque sufficit.

Eadem vero Approximatio aliter & praxi accommodatior sic enuntiatur. Pone $2a = c = 1.2732395447352$; eritque ut summa Unciarum ad mediam, ita unitas ad $\sqrt{\frac{c}{2n+1}}$ quam proxime, existente errore in excessu circiter $\frac{1}{16nn}\sqrt{\frac{c}{2n+1}}$.

Si $n = 100$, erit $\frac{c}{2n+1} = .006334525$, ejusque radix quadrata .07958973 accurata est in sexta decimali, quæ si dividatur per $16nn$, id est per 160000 dabit correctionem .00000050, & hæc subducta de approximatione, relinquit numerum quæsitum .07958923 justum in ultima figura.

Similiter si sit $n = 900$, erit $\frac{c}{2n+1} = .000706962545$, cujus Radix quadrata .026588767 superat verum binario in nona decimali, sin vero Correctio computetur ac subducatur de approximatione, habebitur numerus desideratus accuratus in decima tertia decimali.

En autem approximationem æque facilem & magis accuratam, differentia inter logarithmos numerorum $n+2$ & $n-2$ dividatur per 16, & quotus adjiciatur dimidio logarithmi Indicis n; huic dein summæ adjiciatur logarithmus constans .0980599385151 hoc est dimidium logarithmi semiperipheriæ Circuli, & summa novissima est logarithmus numeri qui est ad unitatem ut summa omnium Unciarum ad mediam. Si $n = 900$, computus erit

$\frac{1}{2}$ log. 900. - - - -	1.4771212547
16) Dif. log. 902 & 898 (- -	.0001206376
Log. constans - - - -	.0980599385
Summa	1.5753018308

Et hæc summa verum superat binario in ultima figura; estque logarithmus numeri 37.6098698 qui est ad unitatem ut summa Unciarum ad mediam in dignitate 900 vel 899.

Et si vis illius numeri reciprocum, sume complementum logarithmi, scilicet —2.4246981692, & numerus eidem correspondens invenietur .026588765 2.

Et hæ sunt Solutiones quæ prodierunt per Methodum Differentialem *Newtoni*; quarum demonstrationes jam non attingo, cum in animo sit brevi publico impertire Tractatum quem de Interpolatione & Summatione serierum conscripsi.

Tui Studiosissimus

19 *Jun.* 1729.

Jac. Stirling.

Nemo est profecto qui post visam hanc superioris Problematis solutionem fateri recuset eam esse usquequaque mirabilem: sed nihil in ea fortasse mirabilius videbitur quam qua arte Quadratura Cir-

Circuli potuerit in eam induci; semel atque iterum, ac sæpius tentavi an Solutio ejusdem Problematis a me confecta quidquam adjumenti mihi afferre posset quo mihi conjicere liceret quid circulus eum ea haberet commune, sed frustra; cum vero aliquandiu perplexus hæsissem qua via id possem consequi, cumque scirem fundamentum investigationis Cl. Viri illud fuisse ut consideraret quo pacto rationes mediæ aliæ ex aliis generentur, invenerat utique rationem mediam in quadrato esse $\frac{1}{2}$, in biquadrato $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$, in sexta potestate $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$, in octava $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$, & sic de cæteris; dum inquam hæc animo revolvebam, incidi fortuito in Epistolam *Wallisii* ad *Leibnitium* in qua hæc verba leguntur.

‘ Ubi dicitur *Nicolaum Mercatorem* primum esse qui Quadratu-
‘ ram aliquam dedit per Seriem infinitam, vide annon mea talis sit,
‘ Arithm. Inf. Prop. 191. $\square = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \ \&c.}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \ \&c.}$

Hos numeros ut aspexi, illico confugi ad Arithmeticam Infinitorum *Wallisii*, e qua hæc excerpsi

$$\square < \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \sqrt{1\frac{1}{3}}$$
$$\square > \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \sqrt{1\frac{1}{4}}$$
$$\square < \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6} \sqrt{1\frac{1}{5}}$$
$$\square > \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6} \sqrt{1\frac{1}{6}}$$
$$\square < \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8} \sqrt{1\frac{1}{7}}$$
$$\square > \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8} \sqrt{1\frac{1}{8}}$$
&c.

Ubi Nota $\square$ usurpatur ad designandam rationem quadrati ad Circulum in eo inscripti, quæ idcirco mutari potest in $\frac{4}{c}$, facta ratione diametri ad circumferentiam ut 1 ad c.

Cum vero perciperem Radicalitates perpetuo minui, facile comperi eas omnino posse amoveri: hinc superiores conclusiones in has alteras mutavi

$\frac{4}{c}$

$\frac{4}{c} < \frac{3}{2}$, etenim quod minus eſt minori, minus eſt majori.

$\frac{4}{c} > \frac{3}{2} \times \frac{3}{4}$, atque quod majus eſt majori, majus eſt minori.

$\frac{4}{c} < \frac{3\times 3\times}{2\times 4\times 4}$

$\frac{4}{c} > \frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 4\times 4\times 6}$

&c.

Itaque aſſumptis ad libitum binis limitibus

$\frac{4}{c} < \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12}$

$\frac{4}{c} > \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12\times 14}$

ex primo limite, per extractionem Radicis quadraticæ, illud deduxi $\frac{2}{\sqrt{c}} < \frac{3\times 5\times 7\times 9\times 11\times \sqrt{13}}{\sqrt{2}\times 4\times 6\times 8\times 10\times 12}$, adeoque $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c}} < \frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 11}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\times 12}\sqrt{13}$, proinde ſi numerus factorum ponatur eſſe $=p$, tunc erit $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c}} < \frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 11 \text{ - - - - - - - -}}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\times 12 \text{ - - - - - - -}}\sqrt{2p+1}$; pone $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c}} = A$, & $2p=n$; hinc fiet ut $\frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 11 \text{ \&c.}}{2\times 4\times 6\times 8\times 10\times 12 \text{ \&c.}}$, hoc eſt media ratio, in poteſtate deſignata per n, major futura ſit quam quantitas $\frac{A}{\sqrt{n+1}}$ ſive major quam $\frac{A}{n+1}\sqrt{n+1}$.

Eadem procedendi via, ex ſecundo limite illud deducetur, mediam rationem in poteſtate deſignata per n, minorem futuram fore quam quantitas $\frac{A}{n+1}\sqrt{n+2}$.

Quanquam vero hæ concluſiones minime aperiant viam qua vir ſupra laudatus ad ſolutionem ſuam pervenerit, nec limites a nobis definiti ad veros numeros tam prope accedant quam ſolutiones ejus contractiores, attamen hoc fortaſſe placebunt, quod ſemper earum ope cognoſcere poſſis utrum ſolutio ſupra verum infrane conſiſtat. Has autem attuli, non quod de eis ipſe mihi quidquam ſumam, ſed quod vir mei amantiſſimus mihi ſuaſit ut eas ederem.

Priuſquam hunc locum omnino relinquamus, non inutile erit exponere Methodum qua quantitates D', D'', D''', ex Æquationibus in Coroll. V. adhibitis ſatis commode expelli poſſint, ſi ita accidat ut termini E, F, G, H, ad æqualia intervalla conſtituantur; pone igitur intervallum b duplum eſſe intervalli a, atque c ejuſdem eſſe triplum; ſit $F-E=d'$, $G-2F+E=d''$, $H-3G+3F-E=d'''$, ſint

ſint præterea termini x, y, z, ſuo quique ordine diſtantes a primô E intervallis v, $2v$, $3v$; quibus poſitis, erunt

$$x = E + \frac{v}{1}d' + \frac{v}{1}\times\frac{v-1}{2}d'' + \frac{v}{1}\times\frac{v-1}{2}\times\frac{v-2}{3}d'''.$$

$$y = E + \frac{2v}{1}d' + \frac{2v}{1}\times\frac{2v-1}{2}d'' + \frac{2v}{1}\times\frac{2v-1}{2}\times\frac{2v-2}{3}d'''.$$

$$z = E + \frac{3v}{1}d' + \frac{3v}{1}\times\frac{3v-1}{2}d'' + \frac{3v}{1}\times\frac{3v-1}{2}\times\frac{3v-2}{3}d'''.$$

Hinc illud deducetur

$$x - E = vd' + \frac{v}{1}\times\frac{v-1}{2}d'' + \frac{v}{2}\times\frac{v-1}{2}\times\frac{v-2}{3}d'''$$

$$y - 2x + E = vvd' + vv\times\overline{v-1}\,d'''$$

$$z - 3y + 3x - E = v^3 d'''$$

Finge nunc v eſſe $= \frac{1}{a}$ erit igitur 1° $x - E = D'$; 2° $y - 2x + E = D''$, 3° $z - 3y + 3x - E = D'''$. proinde

$$D' = \frac{d'}{a} + \frac{1-a}{2aa}d'' + \frac{1-a\times 2-a}{2\times 3a^3}d'''$$

$$D'' = \frac{d''}{aa} + \frac{1-a}{a^3}d'''.$$

$$D''' = \frac{d'''}{a^3}.$$

ſi vero quinque termini E, F, G, H, K, darentur, ad valores quantitatum D', D'', D''' ordinatim adjici deberent

$\frac{1-a}{2}\times\frac{1-2a}{3}\times\frac{1-3a}{4a^4}d''''$, $\frac{1-a}{3}\times\frac{7-11a}{4a^4}d''''$, $\frac{\overline{1-a}\times 3}{2a^4}d''''$; quod attinet valorem quantitatis D'''', is invenietur eſſe $= \frac{d''''}{a^4}$.

Hinc ſi dentur quatuor termini E, F, G, H ad æqualia intervalla poſiti, atque ſtatuatur eſſe a intervallum inter binos quoſque terminos ſibi proximos, deinde fingantur intervalla illa repleri terminis quorum quilibet unitate a proximo diſtet, quorumque tertiæ differentiæ ſint inter ſe æquales, tunc ſumma omnium erit

$$\frac{3a+1}{8a}\times\overline{\overline{E+H}\times\overline{a+1}+\overline{G+F}\times\overline{3a-1}}.$$

CAPUT

CAPUT III.

De Methodo Combinationum.

CL. *Monmort* eas nobis tradidit Combinationum Regulas quas ab aliis acceperat; ad quarum demonſtrationem ille eo principio uſus eſt quo ad rem eandem longe ante eum uſi fuerant viri doctiſſimi *Paſcalius* & *Wallifius*: Si autem ille clarius quam ii neceſſariam connexionem inter principia aſſumpta & concluſiones inde derivatas evicerit, aut majorem vim demonſtrationibus ſuis attulerit, vel brevius hanc doctrinam expoſuerit, vel generaliores concluſiones ex principiis poſitis elicuerit, id ei laudi adſcribi æquum eſt.

In ſecunda Editione Libri *de Sorte*, Quæſtiones de Combinationibus tanquam Problemata ad Ludos Spectantia mihi ſolvenda propoſueram; ad eorum autem ſolutionem eo principio iiſque gradibus ita deductus fueram, ut non modo Regulas Combinationum vulgo notas demonſtrare potuerim, ſed ut mihi aditus patuerit ad eas quæſtiones ſolvendas quæ vulgari Combinationum Methodo non facile ſubjiciantur.

Modus autem quo Regulæ Combinationum a me fuerant demonſtratæ, talis erat.

Si ſint Colluſores aliquot quorum numerus ſit s, & poſſit eorum unuſquiſque æque facile expectare ut cæteros omnes vincat, & Probabilitas quam habet eorum unus quem quis deſignare voluerit, ut cæteros vincat, denotetur per fractionem $\frac{1}{s}$; tum probabilitas ut alteruter ex duobus inter omnes ſpeciatim deſignatis reliquos omnes vincat, denotari debet per fractionem $\frac{2}{s}$: etenim duplo probabilius eſt ut alteruter ex duobus victor evadat quam eorum unus ſpeciatim deſignatus, & Probabilitas ut Colluſorum aliquis non quidem deſignatus, ſed in ea multitudine incluſus quam deſignet numerus p, reliquos omnes vincat, denotari debet pro fractionem $\frac{p}{s}$.

Si ſumma tota depoſita inter Colluſores omnes ſit a; expectatio ſingulorum, hoc eſt jus quod ſinguli habent in ſummam depoſitam æſtimari debet per fractionem $\frac{a}{s}$, etenim jus commune omnium eſt a, ſed unuſquiſque eorum eandem habet partem juris iſtius communis,

munis, cum ex Hypothesi omnes æqua Sorte contendant, adeoque expectatio singulorum est $\frac{a}{s}$ seu $\frac{1}{s}a$.

Hæc confirmari poterunt alia ratione ad hunc modum; Cum numerus Collusorum sit s, & depositum totum sit a, sequitur singulos deposuisse summam $\frac{a}{s}$, sed eò quod Collusor aliquis ludo se obstrinxerit, nihil inde lucri percipit, nihil damni patitur; etenim si quid tale ei obveniret, in alios id redundare necesse foret, quod est contra Hypothesim, si quidem omnes æqua sorte contendunt, adeoque si obligationis suæ eorum quemvis pœniteat, & is velit expectationem suam vendere, æquum est ut pro ea recipiat summam $\frac{a}{s}$, eandem utique quam deposuerat; sed id quod quisque juste recipit est valor Expectationis suæ, adeoque Expectatio singulorum est $\frac{a}{s}$.

Si Spectator aliquis emat Expectationes plurium Collusorum quorum numerus designetur per p, ita ut quicquid cuilibet eorum Sorte obtigerit in se translatum velit, æquum est ut singulis pendat summam $\frac{a}{s}$, adeoque universis summam $\frac{p}{s}a$, quæ proinde evadit illius expectatio.

Hanc igitur generalem conclusionem nobis deduceret licet, cujusque Expectationem esse in ratione composita ex summa quam quisque sit obtenturus si vicerit, & ex Probabilitate eam obtinendi.

Si duo sint eventus tales ut Probabilitas contingentiæ eorum alterutrius quem priorem appellare licet, designetur per $\frac{p}{s}$, Probabilitas vero ut posterior contingat, cum prior contigerit, designetur per $\frac{q}{t}$, & ego proemio aliquo a sim donandus, modo eventus uterque contingat; expectatio mea æstimanda erit ex multiplicatione earum fractionum quibus Probabilitates designantur, & ejus summæ quam sim obtenturus si eventus uterque contigerit; qua propter expectatio mea recte exprimetur per quantitatem $\frac{pq}{st}a$.

Etenim pone eventum illum contigisse cujus Probabilitas designatur per $\frac{p}{s}$, hoc mihi quidem in commodum cedit, nondum tamen jus habeo in summam totam a, sed in eam tantummodo partem quæ de-

per $\frac{q}{t}$, ita ut si velim pacisci cum aliquo qui reliquam Sortis meæ partem in se recipiat, æquum est ut is mihi det in manum summam $\frac{q}{t}a$. Eventus ille igitur cujus Probabilitas designatur per $\frac{p}{s}$, si contigerit, nihilo plus mihi juris tribuit quam ut obtineam summam $\frac{q}{t}a$; potest itaque spectari summa $\frac{q}{t}a$, tanquam proemium mihi concedendum, modo eventus primus contigerit, sed Probabilitas ejus contingentiæ est $\frac{p}{s}$, adeoque expectatio mea priusquam de eventibus quidquam sit compertum, æstimanda est ex quantitate $\frac{p}{s} \times \frac{q}{t}a$.

Possumus itaque hoc ponere fundamentum quo nititur omnis fere Doctrina de eventibus a Sorte pendentibus, nimirum Probabilitatem contingentiæ duorum eventuum compositam esse ex Probabilitate ut eorum unus contingat, & ex Probabilitate ut alter contingat, cum prior contigerit, hoc est, cum prior spectatus fuerit tanquam si contigisset.

Et eadem ratione, Probabilitas contingentiæ trium vel plurium eventuum composita est ex Probabilitate ut primus contingat, & ex Probabilitate ut secundus contingat cum primus contigerit, & ex Probabilitate ut tertius contingat, cum primus & secundus contigerint, & sic in infinitum.

Quibus positis, facilis erit accessus ad Solutiones Problematum quæ Combinationis spectant.

PROBLEMA I.

Data multitudine n, *rerum* a, b, c, d *&c. in acervum promiscue congestarum; invenire Probabilitatem ut si quis binas ex acervo indiscriminatim eduxerit, eæ futuræ sint* a *&* b *speciatim designatæ.*

SOLUTIO.

Utrum res sumendæ simul aut separatim ex acervo educantur, nihil inde mutationis in Probabilitatem eventus inducetur; Probabilitas autem ut a vel b primo tractu ex acervo educatur, ex superius dictis erit $\frac{2}{n}$, pone utramlibet eductam fuisse v. g. a; multitudo igitur rerum reliquarum erit $n-1$, proinde Probabilitas ut b nunc educatur erit

erit $\frac{1}{n-1}$; Probabilitas igitur ut ambæ educantur ſive ſimul ſive per vices erit $= \frac{2}{n} \times \frac{1}{n-1}$.

COROLLARIUM.

Sit S numerus varietatum ſeu Combinationum quibus res binas quaſcunque in data multitudine n aſſumere liceat, erit igitur Probabilitas ut utraque aſſumatur $= \frac{1}{S}$, ſed id demonſtratum fuit hanc Probabilitatem eſſe $\frac{2}{n} \times \frac{1}{n-1}$, erit igitur $S = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$.

PROBLEMA II.

Iiſdem poſitis ac ſupra, invenire Probabilitatem ut ſi ex acervo ternæ eximantur, eæ futuræ ſint a, b, c *ſpeciatim deſignatæ.*

SOLUTIO.

Probabilitas ut a vel b vel c primo tractu educantur eſt $\frac{3}{n}$, pone a eductam fuiſſe, multitudo igitur rerum reliquarum erit $n-1$, adeoque Probabilitas ut b vel c ſecundo tractu educatur eſt $\frac{2}{n-1}$, erit igitur multitudo rerum reliquarum $= n-2$, proindeque Probabilitas ut c nunc educatur erit $\frac{1}{n-2}$, quamobrem Probabilitas ut a, b, c omnes educantur, ſive ſimul, ſive per vices, nulla habita ratione ordinis, erit $\frac{3}{n} \times \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{n-2}$.

COROLLARIUM I.

Sit T numerus varietatum ſeu Combinationum quibus res trinas quaſcunque in multitudine data n aſſumere licet; erit igitur Probabilitas ut a, b, c aſſumantur $= \frac{1}{T}$, ſed hæc Probabilitas demonſtrata fuit æqualis quantitati $\frac{3}{n} \times \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{n-2}$ erit igitur $T = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$.

COROLLARIUM II.

Numerus varietatum seu Combinationum quibus multitudo *p* rerum in majore multitudine *n* eligi possit, æqualis erit Fractioni $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{4}$ &c. quæ ex tot factoribus constat quot sunt Unitates in *p*.

Cl. *Pascalius* in Libro suo qui inscribitur *de Triangulo Arithmetico* Anno 1665. in lucem emisso, numerorum figuratorum proprietates demonstravit, ostenditque Combinationes rerum juxta multitudinem quamvis datam sumendarum, illic contineri; conclusiones autem quas vir Doctissimus e sua Theoria deduxerat, mutatis quibusdam verbis, at servato sensu, sic possunt exprimi.

PROBLEMA *PASCALIANUM* I.

Datis duobus numeris inæqualibus, invenire in Triangulo Arithmetico, quot modis minor in majore contineatur.

SOLUTIO.

Sit *n* major datorum, *p* minor; tum in eo Ordine cujus Exponens est $p+1$, sume numerum ejus *Radix* est $n-p+1$: numerus ille quæsito satisfaciet.

N. B. Verbum *Radix* hoc loco usurpatum denotat locum illum quem quisque figuratus numerus in Ordine suo occupat.

PROBLEMA *PASCALIANUM* II.

Datis numeri cujuslibet Radice & Exponente Ordinis, componere numerum.

SOLUTIO.

Productus numerorum qui præcedunt exponentum Ordinis dividat Productum numerorum continuorum quorum primus sit Radix, Quotiens est quæsitus.

Ut vero hæ Regulæ a *Pascalio* allatæ ad casum aliquem particularem applicentur, pone id requiri ut inveniatur numerus Combinationum quo res binæ sumuntur in multitudine data *n*.

Cum

Cum ſit $p=2$, erit exponens ordinis $p+1=3$, radix igitur $n-p+1$ evadet $=n-1$, adeoque numerus tertii ordinis cujus locus deſignatur per $n-1$ quæſito ſatisfaciet; quapropter ſi fuerit, Exempli gratia, $n=8$, erit numerus quæſitus ſeptimus Triangularis, & ſic de cæteris.

Præterea, cum numerus quæſitus æqualis ſit fractioni cujus Denominator generatur ex continuo ductu eorum numerorum qui præcedunt exponentem Ordinis, perſpicuum eſt Denominatorem hoc in caſu fore 1×2, cumque Numerator ejuſdem fractionis producatur ex numeris continuis quorum primus ſit Radix, patet Numeratorem eſſe $\overline{n-1}\times n$, ex quibus efficitur ut numerus Combinationum ſit $\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}$ ſeu $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$; atque eodem modo ſi ſit $p=3$, invenietur numerus Combinationum $=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$, & ſic de cæteris.

Hanc vero Praxim ex principiis a *Paſcalio* poſitis facile deductam, non tamen ante percepit Vir Cl. quam eam ab amico ſuo D. *Ganieres* acceperat qui eam fortaſſe ex principiis aliunde petitis elicuerat, (vide *Paſcalii* Tractatum qui *Combinationes* inſcribitur pag. 33.)

Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Ordo 1us	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
2us	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	
3us	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,		
4us	1,	4,	10,	20,	35,	56,			
5us	1,	5,	15,	35,	70,				
6us	1,	6,	21,	56,					
7us	1,	7,	28,						
8us	1,	8,							
9us	1,								

CAPUT

CAPUT IV.

De Permutationibus.

PROBLEMA I.

D*Ata multitudine* n *literarum* a, b, c, d, e, *&c. quæ tum inter se sint omnes dissimiles, tum promiscue scriptæ; invenire Probabilitatem ut* a *primum locum occupet,* b *secundum.*

SOLUTIO.

Cum numerus literarum omnium sit n, Probabilitas ut a primum locum occupet erit $\frac{1}{n}$; pone nunc a primum locum occupasse, numerus igitur literarum reliquarum erit $n-1$, adeoque Probabilitas ut b proximum locum occupet erit $\frac{1}{n-1}$: Probabilitas igitur ut a primum locum occupet, b secundum, erit $\frac{1}{n\times n-1}$.

COROLLARIUM I.

Sit S numerus ordinum seu permutationum quas literæ n binæ sumptæ subire possint, ita ut positio ab ordinem unum constituat, ba alterum; Probabilitas igitur ut a in Serie literarum omnium primum locum occupet, b vero secundum, erit $\frac{1}{S}$: sed ea Probabilitas demonstrata fuit æqualis fractioni $\frac{1}{n\times n-1}$, est igitur $S=n\times\overline{n-1}$.

COROLLARIUM II.

Atque eodem ratiocinandi modo, concludere licet numerum permutationum quas literæ n ita simul junctæ ut multitudo junctarum adæquet numerum p, subire possint, æqualem esse quantitati $n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}$ &c. ad tot factores continuatæ quot sunt Unitates in p.

PRO-

PROBLEMA II.

Data multitudine literarum aabbbcccc *quarum aliquæ singularum specierum possint esse inter se similes, invenire Probabilitatem ut si promiscue scribantur, eæ datum ordinem sint consequuturæ; sit ordo datus idem qui suprascriptus est.*

SOLUTIO.

Probabilitas ut ex binis literis *aa* ejusdem speciei earum alterutra primum locum occupet, erit $\frac{2}{9}$; quo posito, Probabilitas ut altera *a* secundum locum occupet, erit $\frac{1}{8}$; quo etiam posito, Probabilitas ut ex ternis literis *bbb* ejusdem speciei earum aliqua tertium locum occupet, erit $\frac{3}{7}$; hoc itidem posito, Probabilitas ut ex binis reliquis *bb* ejusdem speciei earum alterutra quartum locum occupet, erit $\frac{2}{6}$; quo posito, Probabilitas ut tertia residua *b* quintum locum occupet, erit $\frac{1}{5}$; quo posito, necessario eveniet ut reliquæ unius speciei literæ reliquas sedes sint occupaturæ, cujus Probabilitas seu potius Certitudo designari oportet scribendo Unitatem: Probabilitas igitur ut datus Ordo servetur erit $\frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1260}$.

COROLLARIUM I.

Numerus permutationum seu variarum positionum, seu mutationum ordinis quas literæ *aabbbcccc* simul sumptæ recipere possint denotabitur per fractiones $\frac{9}{2} \times \frac{8}{1} \times \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{1} = 1260$.

COROLLARIUM II.

Si data multitudo n rerum specie dissimilium talis sit ut prima species tot contineat individuas quot p continet Unitates, secunda quot q, tertia quot r, quarta quot s &c. numerus permutationum quas multitudo data subire possit, designabitur per fractionem cujus Numerator $n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}$ &c. tot contineat factores quot Sum-

Summa $p+q+r$ seu $n-s$ continet Unitates, cujusque Denominator sit productus ex variis seriebus $p \times p-1 \times p-2$. &c. $q \times q-1 \times q-2$ &c. $r \times r-1 \times r-2$ &c. quarum prima tot factores contineat quot sunt Unitates in p, secunda quot in q, tertia quot in r &c.

PROBLEMA III.

Si Collusores aliquot quorum dexteritates in Globis mittendis sint proportionales quantitatibus datis, singulis Globis certent; invenire Probabilitatem ut Globi ordinem datum inter se sint servaturi.

SOLUTIO.

Sint Globi insigniti notis A, B, C, D; sit ordo datus idem qui suprascriptus est; sint dexteritates proportionales quantitatibus a, b, c, d; his positis, Probabilitas ut Globus A propius ad metam accedat quam ullus reliquorum erit $\frac{a}{a+b+c+d}$, finge id contigisse, tunc Probabilitas ut B proximum locum assequatur erit $\frac{b}{b+c+d}$, fac etiam id evenisse, Probabilitas igitur ut C locum deinceps proximum obtineat erit $\frac{c}{c+d}$, quo etiam posito, Probabilitas ut D in ultimo loco hæreat fiet certitudo, ergo Probabilitas ut datus ordo servetur erit $\frac{a}{a+b+c+d} \times \frac{b}{b+c+d} \times \frac{c}{c+d} \times \frac{d}{d}$.

CAPUT V.

Combinationes & Permutationes ulterius considerata.

DEFINITIO.

Locus literæ est sedes illa quam in Serie naturali literarum unaquæque earum occupat, sic locus literæ a est 1, locus literæ b est 2, & sic de cæteris.

PRO-

PROBLEMA.

Data multitudine quacunque Literarum a, b, c, d, e, f *&c. quæ omnes ſint tum inter ſe diſſimiles, tum indiſcriminatim locatæ, invenire Probabilitatem ut earum aliquæ in locis ſuis reperiantur, aliæ vero a locis ſuis disjungantur.*

SOLUTIO.

Sit n numerus Literarum omnium, p numerus earum quæ in locis ſuis ponantur, q numerus earum quæ a locis ſuis ſeparentur, $n-p-q$ numerus earum de quibus non præſcriptum ſit utrum eæ futuræ ſint in locis ſuis, an ab iis abſuturæ: pone, compendii cauſa,

$$\frac{1}{n}=r,\ \frac{1}{n\times\overline{n-1}}=s,\ \frac{1}{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}=t,\ \frac{1}{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}=v,\ \&c.$$

tunc ſi ſit $p=0$, hoc eſt ſi nulla literarum proprium ſuum locum ſit occupatura, ſume quantitates omnes $1-r+s-t+v$ &c. quæ afficiantur ſignis alternatim affirmativis & negativis; ſin ſit $p=1$, omitte primam quantitatem 1, & ſume $r-s+t-v$ &c. eodem modo ſi ſit $p=2$, omitte primas binas, & ſume $s-t+v$ &c. hoc ſemper obſervato ut prima reſiduarum afficiatur ſigno affirmativo; his paratis, quantitatibus ſingulis reſiduis præfige ordinatim Coefficientes Binomii ad eam poteſtatem evecti quam denotat quantitas q, iis neglectis in quas Coefficiens nulla cadit, tunc quantitates iſtæ reſiduæ, his Coefficientibus ſic affectæ, denotabunt Probabilitatem quæſitam.

Exempli gratia, ſi id requiratur inveniendum quænam ſit Probabilitas ut ex ſex literis, a, b, c, d, e, f, literæ a & b ſpeciatim deſignatæ loca ſua teneant, atque ut c, d, e ſpeciatim etiam deſignatæ, a locis ſuis excludantur; Probabilitas illa ex ſuperius dictis invenietur eſſe $\frac{1}{6\times5}-\frac{3}{6\times5\times4}+\frac{3}{6\times5\times4\times3}-\frac{1}{6\times5\times4\times3\times2}=\frac{11}{720}$.

Probabilitas fore ut a locum ſuum occupet, atque ut b, c, d, e, a locis ſuis ſeparentur, invenietur eſſe,

$$\frac{1}{6}-\frac{4}{6\times5}+\frac{6}{6\times5\times4}-\frac{4}{6\times5\times4\times3}+\frac{1}{6\times5\times4\times3\times2}=\frac{53}{720}.$$

Probabilitas fore ut a in loco ſuo conſiſtat, atque ut literæ reliquæ omnes b, c, d, e, f, e locis ſuis excludantur, invenietur eſſe

$$\frac{1}{6}-\frac{5}{6\times5}+\frac{10}{6\times5\times4}-\frac{10}{6\times5\times4\times3}+\frac{5}{6\times5\times4\times3\times2}-\frac{1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{11}{180}.$$

Probabilitas ut literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, omnes a locis suis excludantur erit

$$1-\frac{6}{6}+\frac{15}{6\times5}-\frac{20}{6\times5\times4}+\frac{15}{6\times5\times4\times3}-\frac{6}{6\times5\times4\times3\times2}+\frac{1}{6\times5\times4\times3\times2\times1},$$

sive $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=\frac{53}{144}$.

Hinc Probabilitas ut una saltem litera locum suum teneat, exprimetur Serie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}-\frac{1}{720}=\frac{91}{144}$.

DEMONSTRATIO.

Numerus casuum quibus *a* possit locum suum servare, æqualis est numero casuum quibus *b* possit, dum *a* moratur in suo loco, & locum suum servare, & ab eo depelli; quod quidem est ejusdem significationis & evidentiæ ac illud Axioma, totum esse æquale omnibus suis partibus simul sumptis: cui consequens est ut si ex numero casuum quibus *a* possit in loco suo consistere, subtrahatur numerus casuum quibus *a* & *b* possit suum utraque locum servare, relinquetur numerus casuum quibus *b*, dum *a* primum locum obtinet, excludi possit a secundo loco.

Ob eandem rationem, si ex numero casuum quibus accidere possit ut *a* & *b* suum utraque locum servet, subtrahatur numerus casuum quibus evenire possit ut *a*, *b* & *c* suum quæque locum servent, relinquetur numerus casuum quibus fieri possit ut dum *a* & *b* suum utraque locum servat, *c* locum suum sit amissura; & sic de cæteris.

Denotet $+a$ Probabilitatem fore ut *a* primum locum occupet, itemque denotet $-a$ Probabilitatem fore ut *a* a primo loco excludatur. Similiter denotent $+b$ & $-b$, Probabilitates fore ut *b* locum suum occupet vel ab eo excludatur.

Denotet $+a+b$ Probabilitatem fore ut *a* & *b* suum utraque locum servet: denotet $+a-b$ Probabilitatem fore ut dum *a* locum suum servat, *b* locum suum sit amissura.

Universe, denotentur Probabilitates fore ut literæ quotlibet datæ in suis quæque locis consistant, & ut literæ aliæ quotlibet datæ a suis quæque locis excludantur, per conjunctas Probabilitates fore ut unaquæque literarum, vel in loco suo consistat, vel ab eo excludatur; exempli gratia denotetur Probabilitas fore ut *a*, *b*, *c* in locis suis consistant, & ut *d*, *e*, a locis suis excludantur per $+a+b+c-d-e$.

Jam

Jam ut nobis liceat conclusiones utiles ex hac notatione derivare, hæc sunt sedulo observanda, 1° Operationes circa hanc rem instituendas nihil aliud quam subtractiones continere, 2° aliam esse rationem subtractionis pro quantitatibus quæ ad lævam Æquationis partem locantur, aliam pro quantitatibus quæ ad dextram consistunt, 3° quantitates ad lævam subtrahendas unam semper quantitatem amplius continere quam quantitates illæ e quibus fit subtractio; quantitatem autem illam unicam qua fit excessus, excedentem vocari; 4° quantitates reliquas omnes ad lævam positas, tum eas e quibus fit subtractio, tum eas quæ subtrahi debent, easdem prorsus esse, iisdemque signis affectas; 5° nihil aliud requiri ad subtractionem quantitatum quæ ad lævam consistunt quam ut quantitates similes serventur, muteturque signum quantitatis excedentis: quod quantitates attinet quæ ad dextram ponuntur, cum eæ sint algebraicæ vulgares, subtractio perficitur more vulgari, jam ut ad Operationes accedamus.

Cum demonstratum fuerit in Cap. III. esse $a = \frac{1}{n}$, $a + b = \frac{1}{n \times \overline{n-1}}$, $a + b + c = \frac{1}{n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}$, cumque quantitates illæ $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n \times \overline{n-1}}$ &c. appellatæ fuerint r, s, t, v &c. hæc concludi poterunt.

$b = r$
$b + a = s$

1° ergo $b - a = r - s$

$c + b = s$ ob eandem rationem qua fit ut $b + a = s$.
$c + b + a = t$

2° ergo $c + b - a = s - t$

$c - a = r - s$ ex 1ª conclusione,
$c - a + b = s - t$ ex 2ᵈᵃ,

3° ergo $c - a - b = r - 2s + t$

$d + c + b = t$
$d + c + b + a = v$

4° ergo $d + c + b - a = t - v$

$$d + c - a = s - t \text{ ex } 1^{a} \text{ conclusione}$$
$$d + c - a + b = t - v \text{ ex } 4^{a},$$

$$5^{o} \text{ ergo } d + c - a - b = s - 2t + v$$

$$d - b - a = r - 2s + t \text{ ex } 3^{a} \text{ conclusione}$$
$$d - b - a + c = s - 2t + v \text{ ex } 5^{a}$$

$$6^{o} \text{ ergo } d - b - a - c = r - 3s + 3t - v$$

$$-a = 1 - r \text{ cum fit } + a = r$$
$$-a + b = r - s \text{ ex } 1^{a} \text{ conclusione}$$

$$7^{o} \text{ ergo } -a - b = 1 - 2r + s$$

$$-a - b = 1 - 2r + s \text{ ex } 7^{a} \text{ conclusione}$$
$$-a - b + c = r - 2s + t \text{ ex } 3^{a}$$

$$8^{o} \text{ ergo } -a - b - c = 1 - 3r + 3s - t$$

Jam si superiores conclusiones attente considerentur, illud percipietur, si quæstio nihil aliud requirat quam ut literæ quædam assignatæ a locis suis excludantur, nec quidquam præscriptum fuerit de permansione cujusquam literæ in suo loco, tunc quantitates ad dextram partem Æquationis positas constanter initium sumere ab Unitate; illud etiam percipietur, si una tantummodo litera requiratur ut locum suum servet, tunc quantitates ad dextram positas initium ducere ab r; at si binæ literæ requirantur ut locum suum servent, tunc quantitates ad dextram positas initium ducere ab s, & sic deinceps: præterea illud perspicuum est has quantitates alternatim sua signa variare, & Coefficientes ipsis præfixas esse Coefficientes Binomii cujus Index æqualis est numero literarum a suis locis exclusarum.

PROBLEMA.

Data multitudine quacunque n *literarum* a, b, c, d, e, f *&c. quæ singulæ toties repetantur quoties Unitas reperitur in* l; *invenire Probabilitatem ut una aliqua litera cujusque speciei assignatæ in loco suo consistat, vel Probabilitatem ut a loco suo excludatur.*

SOLUTIO

SOLUTIO.

Cum n deſignet numerum literarum omnium, l vero numerum illum quo exprimitur quot literæ ſingularum ſpecierum dentur, conſequens eſt ut $\frac{n}{l}$ exprimat numerum ſpecierum; ſit p is ſpecierum numerus quarum unaquæque continere debeat literam aliquam quæ locum ſuum ſervet, itemque ſit q is numerus ſpecierum quarum nulla ne unam quidem contineat literam quæ non a loco ſuo excludatur, hinc fit ut $n-p-q$ deſignet eum ſpecierum numerum de quibus nihil præſcribitur; pone $r = \frac{l}{n}$, $s = \frac{ll}{n \times \overline{n-1}}$, $t = \frac{l^3}{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}$, jam ſi Regulæ in ſuperiore Problemate traditæ hic obſerventur, ſolutio caſus cujuſlibet hujus Problematis facile obtineri poterit, *v. g.* ſi id requiratur inveniendum quænam futura eſt ſit Probabilitas ut nulla litera cujuſquam ſpeciei locum ſuum teneat; hæc Probabilitas invenietur eſſe

$$1 - \frac{q}{1}r + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}s - \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3}t + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{q-3}{4}v$$

&c. jam vero eſt $q = \frac{n}{l}$, quapropter Series ſupraſcripta in hanc alteram mutabitur $\frac{1}{2} \times \frac{\overline{n-l}}{n-1} - \frac{1}{6} \times \frac{\overline{n-l} \times \overline{n-2l}}{n-1 \times n-2} + \frac{1}{24} \times \frac{\overline{n-l} \times \overline{n-2l} \times \overline{n-3l}}{n-1 \times n-2 \times n-3}$ *&c.* proinde Probabilitas ut una ſaltem ſpecies aliquam literam contineat quæ in loco ſuo conſiſtat ſic exprimetur

$1 - \frac{1}{2} \times \frac{n-l}{n-1} + \frac{1}{6} \times \frac{\overline{n-l} \times \overline{n-2l}}{n-1 \times n-2} - \frac{1}{24} \times \frac{\overline{n-l} \times \overline{n-2l} \times \overline{n-3l}}{n-1 \times n-2 \times n-3}$ *&c.* at ſi id requiratur, quænam futura ſit Probabilitas ut binæ ſaltem ſpecies contineant aliquam literam quæ in loco ſuo conſiſtat, illud hoc argumentandi modo invenietur.

I. Probabilitas ut ſpecies aliqua aſſignata contineat literam aliquam quæ in loco ſuo conſiſtat, atque ut nulla reliquarum ſpecierum ullam contineat literam quæ non a loco ſuo excludatur, erit

$\frac{l}{n} - \frac{l \times \overline{n-l}}{n \times \overline{n-1}} + \frac{1}{2} \times \frac{l \times \overline{n-l} \times \overline{n-2l}}{n \times \overline{n-1} \times n-2}$ *&c.* quod, quidem facile fluit ex generali Serie $r - qs + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}t$ *&c.* ponendo $q = \frac{n}{l} - 1 = \frac{n-l}{l}$.

II. Jam vero ſi nulla Species aſſignetur, ſed poſſit earum quælibet hac prærogativa frui, ut nulla alia ullam contineat literam quæ ponatur

natur in suo loco, tunc quoniam numerus specierum omnium denotatur per $\frac{n}{l}$, termini singuli seriei superioris multiplicari debent per $\frac{n}{l}$, quo facto, probabilitas ista reperietur

$$1 - \frac{n-l}{n-1} + \frac{1}{2} \times \frac{\overline{n-l} \times \overline{n-2l}}{n-1 \times n-2} + \frac{1}{6} \times \frac{\overline{n-l} \times \overline{n-2l} \times \overline{n-3l}}{n-1 \times n-2 \times n-3} \text{ \&c.}$$

III. Jam vero si ex Probabilitate ut una saltem species contineat aliquam literam quæ locum suum servet, subtrahatur Probabilitas ut una tantummodo hac prærogativa fruatur, relinquetur Probabilitas ut duæ saltem indiscriminatim sumptæ contineant literam aliquam suæ speciei quæ locum suum teneat, quæ Probabilitas idcirco erit $\frac{1}{2} \times \frac{n-l}{n-1} - \frac{2}{1 \times 3} \times \frac{\overline{n-2l}}{n-2} A + \frac{3}{2 \times 4} \times \frac{\overline{n-3l}}{n-3} B - \frac{4}{3 \times 5} \times \frac{\overline{n-4l}}{n-4} C$ &c. Eadem argumentandi ratione, conclusiones infra positæ facile demonstrari poterunt.

Probabilitas ut ternæ saltem species indiscriminatim sumptæ contineant aliquam literam quæ locum suum servet, erit

$$\frac{1}{6} \times \frac{\overline{n-l} \times \overline{n-2l}}{n-1 \times n-2} - \frac{3}{1 \times 4} \times \frac{\overline{n-3l}}{n-3} A + \frac{4}{2 \times 5} \times \frac{\overline{n-4l}}{n-4} B - \frac{5}{3 \times 6} \times \frac{\overline{n-5l}}{n-5} C \text{ \&c.}$$

Probabilitas ut quatuor saltem species indiscriminatim sumptæ contineant literam aliquam quæ locum suum servet, erit

$$\frac{1}{24} \times \frac{\overline{n-l} \times \overline{n-2l} \times \overline{n-3l}}{n-1 \times n-2 \times n-3} - \frac{4}{1 \times 5} \times \frac{\overline{n-4l}}{n-4} A + \frac{5}{2 \times 6} \times \frac{\overline{n-5l}}{n-5} B - \frac{6}{3 \times 7} \times \frac{\overline{n-6l}}{n-6} C \text{ \&c.}$$

Cum vero Lex continuationis istarum Serierum sit perspicua, non difficile foret eas omnes sub una lege complecti, sed Symbola in nimiam molem excrescerent, quod maximum mihi videtur incommodum.

Ex Principiis supra positis, hæc facile deducentur: si sumantur Manipuli duo Chartarum ex 52 foliis uterque constans, atque id requiratur inveniendum, quænam futura sit Probabilitas ut Chartæ quæcunque binæ ejusdem nominis & figuræ, semel vel sæpius in suo utraque Manipulo eundem locum obtineat, Probabilitas quæsita invenietur per Seriem $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24}$ &c. ad tot terminos continuandam quot sunt folia in Manipulorum alterutro.

Si termini quique bini superioris Seriei alter alteri jungatur, Series evadet

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 6} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10} \text{ \&c.}$$

cujus termini 26 sumendi sunt, sed propter maximam hujus Seriei con-

convergentiam, perpauci illius termini in unam ſummam collecti ad verum prope accedent, ſumptis itaque quinque terminis Probabilitas quæſita ſatis bene deſignabitur per fractionem $\frac{254871}{403200}$, at vero Probabilitas ut binæ Chartæ ejuſdem nominis & figuræ bis vel ſæpius eundem locum obtineant non magis erit quam $\frac{33}{125}$ circiter.

Si *A* & *B* uterque Manipulum Chartarum tenens, eas ſimul ex ſuo uterque Manipulo aliam poſt aliam extrahant, atque ita inter ſe paciſcantur ut quotieſcunque Chartæ quælibet binæ ejuſdem nominis & figuræ eductæ fuerint, *A* daturus ſit *B* nummum 1, modo *B* velit ipſi in manum dare certam pecuniam qua promiſſum illud compenſetur; jam vero ſi quæras quantam pecuniam *B* debeat ipſi *A* pendere, quæſitum invenies eſſe nummum unum, eandem utique pecuniam ſemel datam quam *B* recepturus ſit quotieſcunque ſors ipſi favebit: cujus Demonſtratio quanquam ex antedictis facile deduci poſſit, ex hac tamen conſideratione facilius deducetur quod cum poſſint eſſe 52 Bigæ Chartarum, Expectatio ipſius *B* ex unaquaque poſſibili Biga oriunda eſt quinquageſima ſecunda pars unius nummi, adeoque Expectatio illius totalis ex univerſis Bigis oriunda erit $= 1$, quod ſemper valebit quantuſcunque futurus ſit Chartarum numerus.

CAPUT VI.

De Numero Punctorum in Teſſeris.

NEmo fere eſt qui neſciat, unius Teſſeræ 6 eſſe jactus diverſos, duarum Teſſerarum 36, trium 216, quatuor 1296 *&c.* & ſic deinceps, multiplicato numero jactuum proxime antecedente per 6, ut habeatur conſequens.

Sed non æque facile apparet qua methodo invenire liceat multitudinem caſuum quibus datus Punctorum numerus dato Teſſerarum numero jaci poſſit.

D. *Monmort* exhibuit Tabulam qua continentur caſus omnes Teſſerarum a duabus Teſſeris ad novem uſque incluſive.

In Tractatu *de Menſura Sortis*, nullam ego Tabulam de hac re protuli, ſed Methodum exhibui qua caſus quilibet quæſitus facile obtineri poſſit.

D. *Mon-*

D. *Monmort* in Epistola ad D. *Nic. Bernoulli*, approbationem suam declaraverat modi illius quo ad hanc solutionem perveneram, sed præterire non poterat quin affirmaret me eam ex pag. 141. Libri sui desumpsisse.

Cum vero nimis longum fuisset ostendere quonam artificio ex inspectione istius Tabulæ hanc mihi solutionem arcessere potuissem, maluit Vir Clarissimus difficultates omnes præterlabi, & quasi assertio sua confirmatione non indiguisset, ad res majoris momenti properare.

Attamen cum non cuilibet concedatur facultas veri percipiendi nisi id argumentis eluceat, ea aliquatenus recuperare conabor quæ ad assertionem suam firmandam ille sine dubio attulisset, si quid operæ in hanc rem collocare sibi visum fuisset: quamobrem non alienum esse existimo ea quam breviter potero exponere non modo quæ in pag. 141. ejus libri, sed etiam ea quæ in pag. 139. & 140. ad hanc rem pertinentia reperiuntur, quo fiet ut Lectori melius colligere liceat quid Vir Cl. ad solutionem meam contulerit.

Ut vero ordine procedamus, observandum est eum pag. 139. & 140. explicasse methodum qua Tabula casuum in pag. 141. exhibita construeretur: quam ut uno exemplo patefaciamus, ponatur id requiri ut inveniatur multitudo casuum quibus puncta sexdecim quatuor tesseris exhiberi possint.

Illud præmiserat Vir Cl. facies omnes quatuor tesserarum, 1° vel omnes dissimiles esse, 2° vel duas esse inter se similes, duas vero dissimiles, 3° vel bis binas esse inter se similes, 4° vel tres esse inter se similes, quartam vero simplicem, 5° vel omnes esse inter se similes.

Porro si ita evenerit ut Facies omnes sint inter se dissimiles, idem Facierum aspectus variabitur 24 modis; etenim pone exempli causa Faciem unam exhibuisse Binarium, alteram Ternarium, tertiam Quinarium, quartam Senarium, tum patet has easdem Facies tot modis exhiberi posse quot literæ quatuor *a*, *b*, *c*, *d*, inter se dissimiles loca sua variare possunt; nam quemadmodum litera *a* in eam sedem traduci potest quam *c* occupat, & vice versa litera *c* in eam sedem quam occupat *a*, quo fit ut inde oriatur nova dispositio *c*, *b*, *a*, *d*, sic Tessera ea quæ Binarium exhibuerat, non quidem mutata sede, sed circa se ipsam volvente nunc quinarium exhibere potest; & vice versa Tessera ea quæ ante Quinarium exhibuerat, nunc Binarium potest exhibere; Tesseræ igitur omnes, mutatis vicissim faciebus suis, in tot varietates se componunt quot literæ ejusdem diversitatis ac Tesserarum Facies, loca sua inter se variare possunt: at ex Doctrina Permutationum, liquet literas *a*, *b*, *c*, *d*, variare loca sua 24 modis;

b, c, d, variare loca sua 24 modis; sunt igitur 24 casus quibus contingere potest ut quatuor Tesseræ inter se dissimiles sub eodem aspectu appareant.

Si secundus casus evenerit, hoc est, si fuerint Facies duæ inter se similes, duæ dissimiles; tum numerus varietatum quæ ex hoc eodem aspectu sunt orituræ erit = 12.

Si tertius casus evenerit, numerus varietatum erit 6.

Si quartus, numerus varietatum erit 4.

Si quintus, nulla varietas inde orietur, atque adeo casus iste est unicus, quem idcirco per 1 designare debemus.

Quamobrem si scribantur Facies omnes quæ simul junctæ numerum punctorum datum conficiant, iisque e regione adscribantur varietates quæ ex respondente Facierum aspectu oriri possint, deinde colligantur numeri varietatum in unam summam, hæc summa quæsito satisfaciet, ut videre est in subjecto Paradigmate.

Tesserarum Facies	*Varietates*
1, 3, 6, 6 - -	- - 12
1, 4, 5, 6 - -	- - 24
1, 5, 5, 5 - -	- - 4
2, 2, 6, 6 - -	- - 6
2, 3, 5, 6 - -	- - 24
2, 4, 4, 6 - -	- - 12
2, 4, 5, 5 - -	- - 12
3, 3, 4, 6 - -	- - 12
2, 3, 5, 5 - -	- - 6
3, 4, 4, 5 - -	- - 12
4, 4, 4, 4 - -	- - 1
	125 numerus varietatum.

Sunt igitur casus 125 quibus Puncta sexdecim quatuor Tesseris jaci possint, & eodem modo invenire licet numeros casuum quibus Puncta singula quatuor Tesserarum varie exhibeantur quos hic apponere visum est.

Puncta	*Casus*
IV - - -	- - - 1
V - - -	- - - 4
VI - - -	- - - 10
VII - - -	- - - 20
VIII - - -	- - - 35
IX - - -	- - - 56
X - - -	- - - 80
XI - - -	- - - 104
XII - - -	- - - 125
XIII - - -	- - - 140
XIV - - -	- - - 146
XV - - -	- - - 140
XVI - - -	- - - 125
XVII - - -	- - - 104
XVIII - - -	- - - 80
XIX - - -	- - - 56
XX - - -	- - - 35
XXI - - -	- - - 20
XXII - - -	- - - 10
XXIII - - -	- - - 4
XXIV - - -	- - - 1

1296 Summa casuum.

Atque eodem modo Tabula casuum effingi potest quæ ad multitudinem quamcunque Tesserarum datam porrigatur.

Regula autem a me tradita ad inveniendum numerum casuum quibus datus punctorum numerus, dato Tesserarum numero, jaci possit, sic. expressa fuerat.

Sit $p + 1$ datus Punctorum numerus, n numerus sive multitudo Tesserarum, f numerus facierum in singulis Tesseris, pone $p - f = q$, $q - f = r$, $r - f = s$, $s - f = t$ &c. tum numerus casuum quæsitus erit

$$+ \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \text{ \&c.} \times \frac{n}{1}$$
$$+ \frac{r}{1} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{r-2}{3} \text{ \&c.} \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$$
$$- \frac{s}{1} \times \frac{s-1}{2} \times \frac{s-2}{3} \text{ \&c.} \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$$
&c.

Circa

Circa hanc Seriem pauca veniunt obſervanda, 1° eam eouſque continuari oportere donec aliqui factorum ex quibus termini ejus conflantur vel nihilo æquales vel negativi evadant; 2° tot factores ſingulorum productorum $\frac{p}{1}\times\frac{p-1}{2}\times\frac{p-2}{3}\times$ &c. $\frac{q}{1}\times\frac{q-1}{2}\times\frac{q-2}{3}$ &c. $\frac{r}{1}\times\frac{r-1}{2}\times\frac{r-2}{3}$ &c. ſumendos eſſe quot ſunt Unitates in $n-1$; 3° ſigna terminorum alternatim eſſe affirmativa & negativa.

Quam ut exemplo uno vel altero illuſtremus, requiratur *v. g.* ut aſſignetur numerus caſuum quibus 16 puncta 4 teſſeris jaci poſſint; id ex ſuperiori regula ad hunc modum aſſequi licebit

$$+\frac{15}{1}\times\frac{14}{2}\times\frac{13}{3} = +455$$
$$-\frac{9}{1}\times\frac{8}{2}\times\frac{7}{3}\times\frac{4}{1} = -336$$
$$+\frac{3}{1}\times\frac{2}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}\times\frac{3}{2} = +\ 6$$

jam vero $455-336+6=125$, eſt igitur 125 numerus caſuum quæſitus.

Requiratur iterum ut is caſuum numerus aſſignetur quibus 15 puncta 6 teſſeris jaci poſſint, id ſequenti modo efficietur,

$$+\frac{14}{1}\times\frac{13}{2}\times\frac{12}{3}\times\frac{10}{4}\times\frac{11}{5} = 2002$$
$$-\frac{8}{1}\times\frac{7}{2}\times\frac{6}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{1} = -336$$

eſt igitur numerus caſuum quæſitus $2002-336=1666$.

Hanc vero Regulam ſi ego potuerim vel ex Tabula Cl. *Monmort*, vel ex iis quæ ad Tabulæ ſuæ conſtructionem ille præmiſerat, deducere; mihi neceſſe fuit, 1° ut perciperem ſex primos caſus in teſſeris vulgaribus, vel potius totidem caſus quot ſunt facies in teſſeris ſemper ſecuturos legem numerorum figuratorum.

2° Mihi neceſſe fuit ut callerem proprietates numerorum figuratorum quas idcirco a Cl. viro non deſumpſeram, cum in prima Editione libri ſui vix quidquam ille habuerit quod ad eas pertineret.

3° Oportebat me percipere caſus ſex inſequentes, a Regula antecedentium diſceſſuros; in eam igitur neceſſitatem eram adductus ut legem variationis laborioſa inductione mihi inveſtigandam conſtituerem, quod quidem aſſequi non poteram, niſi Methodus Differentiarum mihi probe cognita fuiſſet, de qua ne verbum quidem unicum ille protulerat in prima Editione libri ſui.

 4° Debui

4°. Debui percepiſſe caſus ſex deinceps inſequentes novam variationem inducere, & univerſe caſus ſenos omnes ſibi propriam ſuam regulam aſciſcere, & ſic in infinitum.

Quibus perpenſis non ſatis intelligo quomodo in me cadere potuit vel minima ſuſpicio me hanc Regulam a Cl. Viro deſumpſiſſe.

Sed ut omnis controverſia de ſuperiori ſolutione tandem tollatur, id aſſerere non verebor me nec ex Doctrina Combinationum, nec ex proprietatibus numerorum figuratorum, nec ex Methodo Differentiarum eam mihi comparaſſe.

Inveſtigatio Superioris Regulæ.

Si Teſſeræ ita fingantur ut Facies una in ſingulis Monada ſignetur, tum tot facies Binario ſignentur quot ſunt Unitates in numero r ad libitum aſſumpto, deinde tot Facies ſignentur Ternario quot ſunt Unitates in rr, & ſic deinceps, ita ut caſus omnes ſingularum teſſerarum denotentur progreſſione geometrica $1+r+rr+r^3$ &c. ad tot terminos continuatæ quot ſunt Facierum diverſæ appellationes f; tunc evehatur hæc progreſſio ad eam poteſtatem n quam denotat multitudo Teſſerarum, palam eſt terminos hujus poteſtatis ſigillatim deſignaturos omnes caſuum varietates quas ſinguli Punctorum numeri n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, &c. quarum minimus eſt n, eodem ordine ſumpti ſubire poſſunt. Nihil igitur magis requiritur ad inveniendum numerum caſuum quibus datus Punctorum numerus $p+1$ jaci poſſit quam ut aſſignetur in poteſtate $\overline{1+r+rr ---- +r^{f-1}}|^{n}$ terminus ille cujus intervallum a primo deſignatur per $p+1-n$.

Quod ut aſſequamur, conſiderandum eſt ſummam progreſſionis geometricæ $1+r+rr ---- +r^{f-1}$ eſſe $\frac{1-r^f}{1-r}$ ſeu $\overline{1-r}|^{-1} \times \overline{1-r^f}|^{1}$; eſt igitur $\overline{1+r+rr ---- +r^{f-1}}|^{n} = \overline{1-r}|^{-n} \times \overline{1-r^f}|^{n}$, eſt autem $\overline{1-r}|^{-n} = 1 + nr + \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} rr + \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} r^3$ &c. itemque eſt $\overline{1-r^f}|^{n} = 1 - nr^f + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} r^{2f} - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} r^{3f}$ &c. quapropter ſi hæ binæ Series inter ſe multiplicentur, termini illi omnes Seriei productæ quos afficiet poteſtas r^{p+1-n} quæſito ſatisfacient.

Ponatur nunc compendii gratia $p+1-n=l$, ſit autem Er^l terminus ille prioris Seriei, cujus diſtantia a primo eſt l, ſit etiam Dr^{l-f} terminus ille cujus diſtantia a primo eſt $l-f$, deinde ſit Cr^{l-2f} terminus ille cujus diſtantia a primo eſt $l-2f$, & ſic deinceps, facto ſemper

ſemper regreſſu per æquales ſaltus verſus primum Seriei terminum; quibus poſitis, ſi termini illi quos ſupra deſignavimus ſcribantur ordine inverſo ad hunc modum $Er^l + Dr^{l-f} + Cr^{l-2f}$ &c. iiſque ſubjiciantur termini poſterioris Seriei ordine naturali ſcripti ad hunc modum, $1 - nrf + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} r^{2f}$ &c. deinde termini reſpondentes omnes in ſe invicem multiplicentur, ſinguli per ſingulos, conſequens erit ut ex hac multiplicatione oriantur termini

$Er^l - nDr^l + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} Cr^l - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} Br^l$ &c. qui omnes poteſtate r^l afficiantur.

Porro cum Coefficiens E tot factoribus conſtet $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c. quot ſunt Unitates in l, patet horum factorum Denominatores illos qui poſt eum Denominatorum numerum quem deſignat $n-1$ ſunt orituri, evaſuros n, $n+1$, $n+2$, &c. qui idcirco iidem ſunt ac primi Numeratorum termini, quapropter ſi ex valore Coefficientis E abjiciantur illi Numeratores & Denominatores qui ſunt inter ſe æquales, relinquetur ex Numeratoribus ordine inverſo ſcriptis, $n+l-1$, $n+l-2$, $n+l-3$ - - - - - - $l+1$, ex Denominatoribus vero ordine naturali ſcriptis, 1, 2, 3 - - - - - $n-1$; quæ omnia facile fluunt ex natura Progreſſionis arithmeticæ, erit igitur terminus

$Er^l = \frac{n+l-1}{1} \times \frac{n+l-2}{2} \times \frac{n+l-3}{3}$ - - - - - - $\frac{l+1}{n-1} r^l$, ſed ex Hypotheſi, eſt $p+1-n=l$, proinde erit $p=n+l-1$, adeoque

$Er^l = \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$ &c. $\times r^l$, & eodem modo invenietur

$-nDr^l = -\frac{p-f}{1} \times \frac{p-f-1}{2} \times \frac{p-f-2}{3}$ &c. $\times nr^l$, atque etiam

$\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} Cr^l = + \frac{p-2f}{1} \times \frac{p-2f-1}{2} \times \frac{p-2f-2}{3}$ &c. $\times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} r^l$, & ſic deinceps, pone jam $r=1$, $p-f=q$, $q-f=r$, $r-f=s$, &c. habebis Regulam a nobis allatam.



CAPUT

CAPUT VII.

Continuatio Responsionis ad Criminationes.

ILlud majori quidem quamvis perexigua probabilitatis specie credi potuisset, me solutiones Problematum quæ vocant *Bassettæ* & *Pharaonis* ex Cl. viro desumpsisse, non enim deerant debilia quædam indicia quæ primo aspectu huic opinioni favere poterant; primum est quod ille ante me hæc Problemata solverat, deinde quod cum Tabulas exhibuisset quibus lucrum seu Prærogativa Oeconomi (Gallice *Banquier*) pro variis conditionibus seu circumstantiis ludi contineretur, ego similes quoque Tabulas exhibuerim; tertium quod leges horum ludorum ex ejus libro verbatim fere recensuerim.

Sed non difficile factu erit suspiciones omnes, si qua tamen suspicio in me cadit, a me depellere: etenim cum Vir Doctissimus ipse non crediderit se a solutione istorum Problematum abstinere debuisse, quamvis prius jamdudum a Dom. *Sauveur* solutum fuisset, ut videre est in *Paris. Erudit. Diario Mens. Feb.* 1679. posterius vero ex prioris solutione paucis mutandis deduci potuerit, quidni mihi licuisset eodem jure uti, measque solutiones in medium afferre, idque eò maxime quod Solutiones D. *Monmort* vix quidquam amplius habuerint quam periclitationes de combinandis inter se iis quantitatibus quæ solutioni Problematum possent esse utiles, inutilibusque rejiciendis, quod quidem non multum artis requirebat; quod si ego Tabulas de lucro Oeconomi exhibuerim, id in eorum gratiam factum fuerat qui computationibus algebraicis non erant satis assueti, nec si Tabulas non dedissem, solutio Problematis quidquam desiderasset: præterea si leges ludi ex Cl. viri libro descripserim, non illi magis hac ratione debeo quam quod mihi non necesse fuerit ut quenquam de his legibus percontarer.

Reliquum est ut pauca attingam de Methodo solutionis, sed priusquam illud fiat, non alienum erit commemorare locum Epistolæ cujusdam a D. *Monmort* ad D. *Nic. Bernoulli* scriptæ, his verbis expressum; *Problema* Moivræi *undecimum aliter solvitur in ejus libro, aliter in meo, quæ solutionum varietas inde oritur quod varie accepimus sensum Propositionis:* circa quæ tria veniunt observanda, primum quod Problema istud undecimum propositum fuerat ab *Huygenio,* non autem solutum; deinde quod D. *Monmort* perperam acceperat

perat sensum Propositionis *Huygenianæ*, quemadmodum a D. *Joh. Bernoulli* admonitus fuerat; postremo quod solutio istius Problematis a me exhibita in Tractatu *de Mensura Sortis*, fons fuerit e quo solutiones meæ Problematum *Bassettæ* & *Pharaonis* quæ conspici possunt in secunda editione ejusdem libri facile manarint, adhibita tamen Methodo Differentiarum quam nemo inficiabitur quin meo jure adhibere potuerim: his accedit quod Doctrina Combinationum a D. *Monmort* ad solutionem suam istorum Problematum usurpata nihil quidquam ad solutionem meam contulerit, ita ut si Methodus illa non extitisset, hæc tamen Problemata a me soluta fuissent; quamvis autem non putem id esse operæ pretium ut solutiones ipsas recenseam, attamen lubet afferre solutionem Problematis *Huygeniani*.

PROBLEMA *HUYGENIANUM* ab Autore non Solutum.

Tres Collusores A, B, C, *assumentes duodecim calculos, quorum* 4 *albi, &* 8 *nigri sunt, ludant hac conditione ut qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes* A, *secunda penes* B, *tertia penes* C; *& tum sequens rursus penes* A, *& sic deinceps ordine: quæritur quænam futura sit ratio sortium ipsorum* A, B, C.

SOLUTIO.

Sit n numerus calculorum omnium, a numerus alborum, b numerus nigrorum, 1 summa deposita seu proemium victori concedendum.

I. A habet casus a quibus album, & casus b quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex prima electione oriunda est $\frac{a}{a+b}$ sive $\frac{a}{n}$; quamobrem si $\frac{a}{n}$ ex 1 subtrahatur, valor residuarum expectationum erit $1 - \frac{a}{n} = \frac{n-a}{n} = \frac{b}{n}$.

II. B habet casus a quibus album, & casus $b-1$ quibus nigrum eligat, sed prima electio est penes A, & incertum est utrum ille victurus sit nec ne, adeoque proemium respectu ipsius B non est 1, sed tantummodo $\frac{b}{n}$, illius igitur expectatio ex secunda electione oriunda

riunda est $\frac{a}{a+b-1} \times \frac{b}{n} = \frac{ab}{n \times \overline{n-1}}$. Subtrahatur $\frac{ab}{n \times \overline{n-1}}$ ex $\frac{b}{n}$, & valor residuarum expectationum erit $\frac{b}{n} \times \frac{\overline{b-1}}{n-1}$.

III. C habet casus a quibus album, & casus $b-2$ quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex tertia electione, erit $\frac{a \times b \times \overline{b-1}}{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}$.

IV. Eodem modo A habet casus a quibus album & casus $b-3$ quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex quarta electione erit $\frac{a \times b \times \overline{b-1} \times \overline{b-2}}{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times n-3}$; & sic deinceps de cæteris.

Scribatur ergo series $\frac{a}{n} + \frac{b}{n-1}P + \frac{b-1}{n-2}Q + \frac{b-2}{n-3}R + \frac{b-3}{n-4}S$ &c. in qua P, Q, R, S, &c. more *Newtoniano* designent terminos præcedentes; tum sumantur tot termini hujus Seriei quot sunt Unitates in $b+1$, etenim non plures erunt electiones quam sunt Unitates in $b+1$, & summa tertiorum omnium, intermissis binis, terminorum, incipiendo ab $\frac{a}{n}$ erit tota expectatio ipsius A, summa tertiorum itidem omnium incipiendo a $\frac{b}{n-1}P$ erit tota expectatio ipsius B, summa tertiorum omnium incipiendo a $\frac{b-1}{n-2}Q$ erit tota expectatio ipsius C; pone nunc $a=4$, $b=8$, $n=12$, quo facto Series generalis in hanc particularem convertetur, nimirum

$$\frac{4}{12} + \frac{8}{11}P + \frac{7}{10}Q + \frac{6}{9}R + \frac{5}{8}S + \frac{4}{7}T + \frac{3}{6}V + \frac{2}{5}X + \frac{1}{4}Y.$$

sive in hanc alteram (multiplicando terminos omnes per eum numerum qui tollendis fractionibus magis idoneus judicabitur nempe hoc in casu per 495) $165+120+84+56+35+20+10+4+1$. adeoque tribuantur ipsi A $165+56+10=231$, ipsi B $120+35+4$, $=159$, ipsi C $84+20+1=105$, erunt igitur eorum expectationes ut 231, 159, 105, sive ut 77, 53, 35.

COROLLARIUM I.

Si plures sint Collusores A, B, C, D, &c. sive ii calculum unum, sive plures, sive eundem calculorum numerum, sive diversum, vicibus suis elegerint, eorum expectationes ope superioris Seriei facili negotio determinabuntur.

C O-

COROLLARIUM II.

Si vero Problema *Huygenianum* accipiatur eo ſenſu quo illud intellexit *D. Monmort*, nimirum ut ſi cui Colluſorum contigerit ut calculum nigrum educat, eum illico in acervum recondat, res facillime conficietur, non quidem per Æquationes e quibus nihil præter caſus particulares colligere licet, ſed ejus Seriei ſubſidio quam ante adhibuimus; etenim cum, ex Hypotheſi, nihil unquam detrahatur de numero calculorum, pro $b-1$, $b-2$, $b-3$, &c. $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c. ſcribantur b & n reſpective, tum Series Problematis ſuperioris evadet $\frac{a}{b} + \frac{ab}{nn} + \frac{abb}{n^3} + \frac{ab^3}{n^4} + \frac{ab^4}{n^5} + \frac{ab^5}{n^6}$ &c. quæ eſt in infinitum continuanda, cujus ſi ſumantur tertii quique termini, expectationes erunt

$$\frac{a}{n} + \frac{ab^3}{n^4} + \frac{ab^6}{n^7} + \frac{ab^9}{n^{10}} \text{ \&c.}$$

$$\frac{ab}{nn} + \frac{ab^4}{n^5} + \frac{ab^7}{n^8} + \frac{ab^{10}}{n^{11}} \text{ \&c.}$$

$$\frac{abb}{n^3} + \frac{ab^5}{n^6} + \frac{ab^8}{n^9} + \frac{ab^{11}}{n^{12}} \text{ \&c.}$$

ſed termini harum ſerierum ſunt in progreſſione geometrica, & ratio cujuſque termini ad ſequentem eadem eſt ubique, nempe ut n^3 ad b^3, quapropter ſummæ ſerierum erunt ut primi ipſarum termini, hoc eſt ut $\frac{a}{n}$, $\frac{ab}{nn}$, $\frac{abb}{n^3}$, ſive ut nn, bn, bb, quod in caſu hujus Problematis fit 9, 6, 4, quos quidem numeros particulares Cl. *Monmort* ex Æquationibus deduxerat.

COROLLARIUM III.

Si Colluſores quotcunque *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. conditionibus ſecundi Corollarii certent, ſume tot terminos in ratione n ad b quot ſunt Colluſores, termini illi, ſuo quique ordine ſumpti, denotabunt Extationes Colluſorum.

Hactenus credo Lectoribus ſatis conſtat me in ſecunda Editione Libri *de Sorte* nihil quidquam a D. *Monmort* mutuaſſe quod ſpectaret Series infinitas, Combinationes, numeros figuratos, Methodum Differentiarum, Solutiones Problematum *Baſſettæ* & *Pharaonis*; nunc vi-

videamus qua ratione inductus Vir Clarissimus sibi persuadere potuerit me, in prima Editione ejusdem libri, operam satis inutilem collocasse in solvendis iis Problematibus quæ ipse prius solverat, measque solutiones ad suarum imitationem fuisse confectas, vel quod multo gravius est eas ex suis verbatim expressas fuisse, quem animi sui sensum non ille quidem chartæ commisit, amicis tamen suis ore impertivit: ut vero melius appareat qua æquitate Vir Cl. judicium adeo durum de me pronunciarit, non alienum erit eas afferre solutiones quas uterque nostrum varie confecimus de Problemate quinto *Huygeniano.*

PROBLEMA II. *HUYGENIANUM* quintum.

A & B *assumentes singuli* 12 *numeros ludunt tribus Tesseris hac conditione ut si* 11 *Puncta jaciantur,* A *tradat nummum ipsi* B, *at si* 14 *Puncta jaciantur,* B *tradat nummum ipsi* A, *& ut ille ludum victurus sit qui primum omnes habuerit numeros, quæritur ratio sortis ipsius* A *ad sortem ipsius* B.

Quod ut solveret Vir Doctissimus, tres & viginti quantitates incognitas adhibuerat quibus variæ Collusorum conditiones ex continuatione ludi necessario emergentes exprimerentur; etenim cum sors ipsius *A* possit subire undecim mutationes, prout ille nummum unum vel duo vel plures vicerit, possitque propter eandem rationem sors ipsius *B* totidem variationes induere, sequitur esse viginti duo conditiones quibus *A* & *B* post inceptum ludum varie afficiantur; his si addatur conditio ludi incipientis, conditiones erunt omnino viginti tres, cui respondent totidem incognitæ a D. *Monmort* usurpatæ: illud vero est notatu maxime dignum quod si *Huygenius* majorem nummorum numerum sumpsisset, qualem *v. g.* 100, necesse futurum fuisset ut Vir Cl. sua methodo adstrictus adhibuisset 199 incognitas quarum valores intra Decennium non elicuisset, etenim si sit n numerus nummorum quos singuli habeant, oportet adhiberi tot Æquationes quot sunt Unitates in $2n-1$.

Cum vero non necesse habeam hanc *Monmortianam* Solutionem ulterius persequi quam quidem leviter indicare satis est, ad nostram pergere visum est.

SOLUTIO *superioris Problematis.* *

Sit p numerus nummorum quos uterque sigillatim assumat, sint a & b numerus casuum quibus Collusores *A* & *B* nummum unum vincere

* Probl. IX. *de Mensura Sortis.*

vincere possint, tunc ratio sortium erit a^p ad b^p; jam in casu propositio est $p=12$, $a=27$, $b=15$, sive cum sit $27, 15 :: 9, 5$, pone idcirco $a=9$, $b=5$, hinc ratio expectationum erit ut 9^{12} ad 5^{12} sive ut 282429536481 ad 244140625 qualem *Huygenius* fore asseruit.

SOLUTIO *generaliter.*

Sit p numerus nummorum ipsius A, q vero numerus nummorum ipsius B; & A in se suscipiat ut prius nummos q, quam B nummos p lucraturus sit, tunc ratio sortium erit ut $a^q \times \overline{a^p - b^p}$ ad $b^p \times \overline{a^q - b^q}$.

INVESTIGATIO.

Finge A nummos habere $E, F, G, H,$ &c. quorum numerus sit p, B vero habere nummos, $I, K, L,$ &c. quorum numerus sit q; finge insuper valorem cujusque nummi esse ad valorem sequentis ut a ad b, ita ut $E, F, G, H, I, K, L,$ sint in progressione geometrica; his ita positis, poterunt A & B, quotiescunque jactus aliquis instituitur, eas deponere summas quæ sint respective proportionales numeris casuum quibus alter alterum vincere possit; etenim cum primum ludere incipiunt potest A deponere nummum H, at vero B nummum I, sed H ad I ex Hypothesi est ut a ad b, ergo jam A & B æquali conditione certant; pone A vicisse, poterit igitur ille deponere nummum I, at B nummum K, sed I ad K ex hypothesi est ut a ad b, ergo A & B etiamnum pergunt certare æquali conditione; sin, B primo jactu vicerit A, poterit A tunc deponere nummum G, at vero B nummum H, quorum nummorum G & H ratio est ut a ad b, & sic deinceps; ergo quandiu A & B certant, semper certant æquali conditione: jam vero Expectatio ipsius A in summam quam B deposuit est in ratione composita ex ea summa & ex Probabilitate eam obtinendi, & vicissim Expectatio ipsius B in summam quam A deposuit est in ratione composita ex ea summa & ex Probabilitate eam itidem obtinendi, hæ vero Expectationes cum sint æquales, sequitur Probabilitates quas A & B respective habent ut adversarium suum vincant esse in ratione summarum quas ipsi deponunt, hoc est ut summa Terminorum $E, F, G, H,$ &c. quorum numerus est p ad summam terminorum $I, K, L,$ &c. quorum numerus est q, hoc est ut $a^q \times \overline{a^p - b^p}$ ad $b^p \times \overline{a^q - b^q}$, quod facile constabit ex Methodo summandi Progressiones geometricas: jam ex eo quod positi fuerint nummi, quisque ad sequentem, ut a ad b, non inde quid-

quidquam mutationis inductum est in Probabilitates vincendi, ergo hoc posito valores singulorum esse inter se æquales, Probabilitates vincendi seu sortes ipsorum *A* & *B* etiamnum erunt inter se in illa ipsa ratione quam definivimus.

COROLLARIUM I.

Si a & b habent rationem æqualitatis, ratio sortium erit ut p ad q; etenim si quantitates illæ quibus ratio sortium exprimitur ambæ dividantur per $a-b$, primus quotiens erit
$a^q \times \overline{a^{p-1}b + a^{p-2}bb + a^{p-3}b^3}$ &c. ad tot terminos continuatus quot sunt unitates in p, secundus vero erit $a^p \times \overline{a^{q-1}b + a^{q-2}bb + a^{q-3}b^3}$ &c. ad tot terminos continuatus quot sunt unitates in q; at termini omnes harum Serierum sunt inter se æquales propter $a=b$, earum igitur summæ erunt ut quantitates p & q quibus multitudines terminorum designantur, ac proinde ratio sortium erit ut p ad q.

COROLLARIUM II.

Si *A* habeat nummum unicum, *B* vero numerum quemlibet nummorum quantumvis magnum, sed singulis Tesseræ jactibus Probabilitates vincendi sint ut 2 ad 1, probabilius erit ut *A* lucraturus sit omnes nummos ipsius *B* quam ut *B* sit lucraturus unicum illum nummum quem habet *A*, etenim ratio sortium hoc in casu evadit ut 2^q ad 2^q-1.

Cum vero superius Problema habeat affinitatem aliquam cum Problemate quodam alio mihi a spectatissimo viro Dom. *Tho. Woodcock* olim proposito cui solutionem paucis post diebus quam propositum erat impertiveram, non abs re fuerit hoc priori subnectere.

PROBLEMA III.

Si A *&* B *quorum Dexteritates seu casus quos uterque habet ad vincendum sint inter se in ratione data* a *ad* b, *deponant in singulos ludos summas quæ sint inter se ut* L *ad* G, *& hoc pactum ineant ut non prius ludendi finem faciant quam vel* A *ab adversario tot deposita abstulerit quot sunt unitates in* q, *vel* B *tot abstulerit ab* A *quot sunt unitates in* p; *quæritur Lucrum vel Damnum ipsius* A.

SOLU-

SOLUTIO.

I. Sint numeri p & q inter se æquales, itemque sint Dexteritates a & b inter se in ratione æqualitatis: his positis, Lucrum ipsius A designabitur per $pp \times \frac{\overline{G-L}}{2}$, quod in Damnum convertetur si sit L majus quam G.

II. sint numeri p & q inter se inæquales, sed pone dexteritates esse æquales, tunc Lucrum ipsius A exprimetur per $pq \times \frac{\overline{G-L}}{2}$.

III. Sint p & q inter se inæquales, dexteritates vero in æquales, tunc Lucrum ipsius A exprimetur per $\frac{\overline{pa^p - pb^q}}{a^p + b^p} \times \frac{\overline{aG - bL}}{2}$.

IV. Sint p & q, itemque a & b inter se inæquales, tunc lucrum ipsius A erit $\frac{\overline{qa^q \times \overline{a^p - b^p} - pb^p \times \overline{a^q - b^q}}}{a^{p+q} + b^{p+q}} \times \frac{\overline{aG - bL}}{a - b}$.

Aliquanto post quam Problema superius fuerat a me solutum, ad D. *Nic. Bernoulli* scripseram me illud solvisse, ipsa tamen solutione non missa; hoc tantummodo innuens eam a Methodo serierum infinitarum deductam fuisse, ut vero Vir Cl. Epistolam meam accepit, ille binas ad me misit solutiones quarum conclusiones cum mea omnino coincidebant, sed cum modus solutionis uterque quo Vir Cl. usus est melior meo fuerit, visum est meum supprimere; ex binis vero solutionibus quas mihi impertiverat, eam afferre quæ mihi præ altera placuit; sic igitur ad me scripsit.

" Patruus meus observabit Problema istud posse etiam solvi eadem
" via qua tu solvisti Problema nonum tuum *de Mensura Sortis*, ete-
" nim liquet Collusorum Expectationes nullam mutationem receptu-
" ras utrum summæ in singulos ludos depositæ sint L & G, an vero
" eæ constituant Progressionem hujus generis

" $L, G, G + \frac{b}{a} \times \overline{G-L}, G + \overline{\frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}} \times \overline{G-L}, G + \overline{\frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} + \frac{b^3}{a^3}} \times \overline{G-L}$.

" &c. cujus terminorum numerus sit $p+q$, ponendo scilicet p & q
" eos designare depositorum numeros quos A & B sigillatim amit-
" tere periclitantur. Siquidem in utroque casu, lucrum ipsius A erit

" $\frac{aG - bL}{a - b}$: jam vero cum summa terminorum quotcunque hujus

" Pro-

" Progressionis obtineri possit, consequens est ut summæ utrique Col-
" lusorum sigillatim competentes obtineantur; sint igitur hæ sum-
" mæ inter se ut S & T, sint etiam Probabilitates quas alter Collu-
" sorum habeat ut alterius deposita omnia auferat, inter se ut A &
" B, quæ Probabilitates designantur per quantitates $\frac{a^{p+q}-a^{q}b^{p}}{a^{p+q}-b^{p+q}}$ &
" $\frac{a^{q}b^{p}-b^{p+q}}{a^{p+q}-b^{p+q}}$, quemadmodum tu in præfato Problemate ego vero
" in D. *Monmortii* Libro seorsim invenimus, quibus positis lucrum ip-
" sius A invenietur esse $AT - BS$, seu $\frac{aG-bL}{a-b} \times \overline{Aq-Bp}$.

Ego vero illud ante libenter fassus sum, idque ipsum etiamnum libenter fateor, quamvis solutio Problematis mei noni causam fortasse dederit hujus solutionis, me tamen nihil juris in eam habere, eamque Cl. illius Autori ascribi æquum esse.

Septem aut octo abhinc annis D. *Stevens*, Int. Templ. Socius, Vir ingenuus, singulari sagacitate præditus, id sibi propositum habens ut Problema superius allatum solveret, hac ratione solutionem facile assecutus est, quam mihi his verbis exhibuit.

Sint R & S Probabilitates quas Collusores habent ut alter alterius deposita omnia auferat, quales ex Problemate tuo nono colligere licet, fac 1° summas in singulos ludos depositas esse inter se æquales, easque esse G & G, cum vero vel A lucraturus sit summam totam qG vel perditurus summam pG, perspicuum est lucrum totum ipsius A designari oportere per $RqG - SpG$, præterea cum summæ in singulos ludos depositæ sint G & G, Dexteritates vero a & b, patet lucrum ipsius A, ipsi ex unaquaque lusione oriundum reputari debere per $\frac{aG-bG}{a+b}$: 2° pone summas in singulos ludos depositas esse L & G, lucrum igitur ipsius A ex unaquaque lusione ipsi oriundum perinde æstimandum erit ac si esset $\frac{aG-bL}{a+b}$; jam vero lucrum uniuscujusque ludi in primo casu est in ea ratione ad lucrum uniuscujusque ludi in postremo, ut lucrum universum primi casus ad lucrum universum postremi; Lucrum igitur ipsius A ex universis lusionibus ipsi oriundum erit in postremo casu $\overline{Rq-Sp} \times \overline{\frac{aG-bL}{a-b}}$, seu ut tu illud expressisti $\overline{\frac{qa^{q} \times \overline{a^{p}-b^{p}} - pb^{p} \times \overline{a^{q}-b^{q}}}{a^{p+q}-b^{p+q}}} \times \overline{\frac{aG-bL}{a-b}}$. Doc-

Doctiſſimus adoleſcens D. *Cranmer* apud Genevenſes Mathematicæ Profeſſor digniſſimus, cujus recordatio æque ac Collegæ ejus peritiſſimi D. *Calandrin* mihi eſt perjucunda, cum ſuperiore anno Londini commoraretur, narravit mihi ſe ex literis D. *Nic. Bernoulli* ad ſe datis accepiſſe Cl. Virum novam ſolutionem hujus Problematis adeptum eſſe, quam prioribus autor anteponebat; cum vero nihil de via ſolutionis dixerit, ſi mihi conjicere liceat qualis ea ſit, hanc opinor eandem eſſe atque illam quam modo attuli.

Problema Decimum octavum Tractatus *de Menſura Sortis* tale erat ut vix ullum difficilius in tota ſortium Doctrina reperias, attamen ejus Solutio ad felicem exitum a me perducta fuerat; de hoc Problemate ſic ſcripſit D. *Monmort* ad D. *Nic. Bernoulli.* Problema Decimum octavum *Moivræi* eſt Problema Combinationum, magnamque habet cognationem cum primo, quo fit ut utriuſque ſolutio ex formula mea elici poſſit, vel ex generaliori modo expoſita pag. 136. libri mei quæ quidem latius patet quam Autoris Regula, cui D. *Bernoulli* his verbis reſcripſit, Problema iſtud tuum quo dicis contineri Problema *Moivræi* decimum octavum diverſum eſt a *Moivræi* Problemate.

Non modo Problema meum differebat a *Monmortiano*; ſed illud fidenter afferere auſim nihil quidquam extare ſive in prima Editione Libri ejus, ſive in ſecunda, quod vel minimum lucis ad eam ſolutionem poſſit afferre; quod ſi quis ſolo auxilio fretus eorum quæ ex Viri Cl. Libris colligi poſſint ad hanc ſolutionem ſe accingere velit, eum inſuperabili labore premi neceſſe eſt, antequam dimidiam vel fortaſſe centeſimam partem penſi ſui confecerit; ſed lubet tum Problema ipſum, tum ſolutionem afferre.

PROBLEMA IV.

Certet A *cum* B, *fore ut ipſe, dato tentaminum numero, teſſera dato facierum numero conſtante, facies quaſcunque datas jacturus ſit: quæritur Expectatio ipſius* A.

SOLUTIO.

Sit $p+1$ numerus facierum in teſſera, n numerus tentaminum datus, f numerus facierum quas jaci oporteat.

Numerus caſuum quibus *A* Monadem ſemel vel pluries tentaminibus numero n jacere poſſit, eſt $\overline{p+1}^{n}-p^{n}$ ut patet ex ante demonſtratis.

Ex-

Expungatur Binatius e numero facierum, ita ut numerus facierum redigatur ad p, tunc erit numerus casuum quibus *A* Monadem semel vel pluries, tentaminibus numero n jacere possit, $p^n - \overline{p-1}|^n$.

Ergo, jam restituto Binario, numerus casuum quibus *A* Monadem & Binarium jacere possit est differentia præcedentium casuum, nimirum $\overline{p+1}|^n - 2p^n + \overline{p-1}|^n$.

Expungatur nunc Ternarius, tum erit numerus casuum quibus *A* Monadem & Binarium jacere possit $p^n - 2\times\overline{p-1}|^n + \overline{p-2}|^n$.

Ergo, jam restituto Ternario, numerus casuum quibus *A* Monadem, Binarium & Ternarium jacere possit, reperietur esse $\overline{p+1}|^n - 3\times p^n + 3\times\overline{p-1}|^n - \overline{p-2}|^n$. & sic deinceps de cæteris.

Scribantur ergo ordine potestates omnes (mutatis alternatim signis) $\overline{p+1}|^n - p^n + \overline{p-1}|^n - \overline{p-2}|^n + \overline{p-3}|^n$ &c. quibus præfigantur Coefficientes potestatis designatæ per f, quo facto, summa terminorum erit numerator expectationis ipsius *A*, cujus denominator erit $\overline{p+1}|^n$.

Quin etiam Problema superioris inversum a me fuerat solutum, cujus solutionem lectoribus non injucundam fore confido, quamque idcirco hic subjiciam.

PROBLEMA V. *superioris inversum.*

Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile ut Collusorum alter A *facies quascunque datas jacturus sit, Tessera constante ex dato facierum numero.*

SOLUTIO.

Sit ut antea $p+1$ numerus facierum in Tessera, f numerus facierum datus, n numerus tentaminum quæsitus; pone log. $\frac{1}{1-\sqrt[f]{\frac{1}{2}}} = a$, itemque log. $\frac{p+1}{p} = b$, tunc erit $n = \frac{a}{b}$ prope.

DEMONSTRATIO.

Si numerus facierum quas jaci oporteat sit 6, expectatio ipsius *A* erit

$p+1$

$$\frac{\overline{p+1}|^n - 6p^n + 15\times\overline{p-1}|^n - 20\times\overline{p-2}|^n + 15\times\overline{p-3}|^n - 6\times\overline{p-4}|^n + \overline{p-5}|^n}{\overline{p+1}|^n}.$$

Fingantur termini $p+1$, p, $p-1$, $p-2$ &c. esse in progressione geometrica, quod quidem a vero non multum aberrabit, si p ad 1 habuerit rationem satis magnam, pone $\frac{p^n}{\overline{p+1}|^n} = \frac{1}{r^n}$, ergo Expectatio ipsius A erit $1 - \frac{6}{r^n} + \frac{15}{r^{2n}} - \frac{20}{r^{3n}} + \frac{15}{r^{4n}} - \frac{6}{r^{5n}} + \frac{1}{r^{6n}} = \frac{1}{2}$.

Extrahatur utrinque radix sexta, hinc fiet $1 - \frac{1}{r^n} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$ est igitur $r^n = \frac{1}{1-\sqrt[6]{\frac{1}{2}}}$, pone jam log. $r = b$, & log. $\frac{1}{1-\sqrt[6]{\frac{1}{2}}} = a$, tunc erit $nb = a$, adeoque $n = \frac{a}{b}$, & eadem erit demonstratio de cæteris casibus.

EXEMPLUM I.

Invenire quotenis jactibus vulgaris tesseræ futurum sit probabile ut A facies omnes jaciat.

Log. $\frac{1}{1-\sqrt[6]{\frac{1}{2}}} = 0.9621753$, Log. $\frac{6}{5} = 0.0791812$, est igitur $n = \frac{0.9621753}{0.0791812} = 12 +$ &c. ergo concludere jam licet numerum jactuum quæsitum esse 12 circiter.

EXEMPLUM II.

Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile ut A, tessera faciebus 216 constante, facies sex datas jaciat, sive ut tribus tesseris vulgaribus Terniones omnes jaciat

Log. $\frac{1}{1-\sqrt[6]{\frac{1}{2}}} = 0.9621753$, Log. $\frac{216}{215} = 0.0020152$, ergo $n = \frac{0.9621753}{0.0020152} = 477$ prope.

Problema Decimum quintum Libri *de Mensura Sortis* continebat Solutionem ludi quem Galli vocant *une Poulle*, hanc autem Cl. *Mon-*

mort nec laudat nec reprehendit, illud tantum modo observat solutionem hujus Problematis non quidem in libro suo confectam, extitisse tamen in Epistola a se ad Cl. *Nic. Bernoulli* missa, 1ª Apr. 1711; mox subjungit, Methodus serierum infinitarum a *Moivræo* ad hanc solutionem adhibita, facile ad tres Collusores accommodari potest, at vero si plures sint, ostendi eam prorsus inutilem evasuram; sed paucis post mensibus quam hæc scripta fuerant, in lucem prodiit Methodus id conficiendi ope serierum infinitarum quam casus omnes hujus Problematis pertingere ostendi; hanc vero videre licet in *Actis Philosophicis* pro Mensibus Octob. Nov. Decemb. 1714, ubi alia solutio ejusdem Problematis ab eximio Mathematico D. *Nic. Bernoulli* exhibita fuit.

Problema octavum ita fuerat explicatum ut ex casu particulari a me in exemplum allato non difficile fuerit Methodum solutionis generalem colligere; cum vero hæc Methodus non incommodo caruerit, quippe quæ tentaminibus fuerit obnoxia, quod quidem Cl. *Monmortio* non placuerat, quanquam ipse, ut fassus est, eandem prætentare viam coactus fuerit, hanc idcirco novam excogitavi quam in sequenti Problemate tradam.

PROBLEMA VI.

Tot Collusores quot quis voluerit, A, B, C, *&c. quorum dexteritates* a, b, c, *&c. sint in ratione data, ea conditione ludant ut qui primus datum ludorum numerum vicerit, totum depositum auferat, tum post ludos aliquot peractos, desint ipsi* A *ludi* p *quominus victor evadat, ipsi* B *ludi* q, *ipsi* C *ludi* r; *requiruntur sortes singulorum, ac primum ipsius* A.

SOLUTIO.

1°. Scribatur Unitas.

2°. Scribantur literæ singulæ quibus dexteritates denotantur, ea excepta quæ respicit Collusorem illum cujus expectatio primum requiritur.

3°. Scribantur Combinationes binæ, ternæ, quaternæ *&c.* literarum omnium, eadem litera semper excepta.

4°. Ex his Combinationibus, eæ perpetuo rejiciantur quibus id designatur vel *B* vicisse ludos *q*, vel *C* ludo *r* *&c.* quos ipsi *B*, *C*, *&c.* sigillatim desiderant.

5°. Mul-

5°. Multiplicentur termini scripti omnes per a^{p-1}.

6°. Præfigantur productis singulis ii numeri quibus productorum variæ permutationes ex varia literarum positione oriundæ, designantur.

7°. Addantur in unam summam producta singula earumdum dimensionum.

8°. Dividantur summæ ordine sumptæ per f^{p-1}, f^{p}, f^{p+1}, f^{p+2} &c. posita $f = a + b + c$ &c.

9°. Denique, Multiplicetur totum illud quod ex divisionibus ortum est per $\frac{a}{f}$. Productum hoc postremum designabit expectationem quæsitam, atque eodem modo colligi poterunt Expectationes reliquorum.

EXEMPLUM.

Positis $p=2$, $q=3$, $r=5$, scribantur ex præscripto Regulæ, 1, $b+c$, $bb+bc+cc$, $bbc+bcc+c^3$, $bbcc+bc^3+c^4$, bbc^3+bc^4, $+bbc^4$, tum multiplicentur termini scripti per a^{p-1}, hoc est in casu hujus exempli per a, deinde præfigantur productis singulis variæ eorum permutationes, divisis interea summis earumdem dimensionum per f^{p-1}, f^{p}, f^{p+1} &c. hoc est per f, f^2, f^3, &c. postremo multiplicetur totum illud quod ortum est per $\frac{a}{f}$, emerget Expectatio ipsius $A =$

$$\frac{a}{f} \text{ in } \frac{a}{f} + \frac{2ab+2ac}{f^2} + \frac{3abb+6abc+3acc}{f^3} + \frac{12abbc+12abcc+4ac^3}{f^4}$$

$$+ \frac{30abbc+20abc^3+5ac^4}{f^5} + \frac{60abbc^3+30abc^4}{f^6} + \frac{105abbc^4}{f^7}.$$ Jam si interpreteris a, b, c ad libitum, ita ut *v. g.* sit $a=1$, $b=1$, $c=1$ erit $f=3$, adeoque expectatio ipsius A numeris expressa erit $\frac{1}{3} \times \overline{\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{12}{27} + \frac{28}{81} + \frac{55}{243} + \frac{90}{729} + \frac{105}{2187}} = \frac{1433}{2187}$, eadem operandi ratione invenietur Expectatio ipsius $B = \frac{635}{2187}$, itemque expectatio ipsius $C = \frac{119}{2187}$.

De Problemate quinto Libri *de Mensura Sortis* sic scribit D. *Monmort* ad D. *Nic. Bernoulli. Problema quintum* Moivræi, *a me solutum*

fuit in libro meo, formula vero solutionis quam Autor attulit eadem est atque mea.*

Problema autem istud quintum tale erat.

PROBLEMA VII.

Si sint casus a *quibus singulis tentaminibus eventus aliquis contingere possit, & casus* b *quibus possit non-contingere, invenire quotenis tentaminibus futurum sit æque probabile ut Eventus ille contingat ac ut non-contingat.*

SOLUTIO.

Sit x numerus tentaminum quæsitus, ergo per jam demonstrata, erit $\overline{a+b}|^x - b^x = b^x$, sive $\overline{a+b}|^x = 2b^x$, est igitur $x = \dfrac{\log. 2}{\log. \overline{a+b} - \log. b}$

Insuper si resumatur Æquatio $\overline{a+b}|^x = 2b^x$, atque ponatur $a, b :: 1, q$, tunc Æquatio in hanc migrabit $\overline{1+\frac{1}{q}}|^x = 2$, attollatur $1+\frac{1}{q}$ ad potestatem x ope Theorematis *Newtoniani*; hinc fiet

$1 + \dfrac{x}{q} + \dfrac{x}{1} \times \dfrac{x-1}{2qq} + \dfrac{x}{1} \times \dfrac{x-1}{2} \times \dfrac{x-2}{3q^3}$ &c. $= 2$. In hac Æquatione si sit $q=1$, erit $x=1$; si sit q infinita, erit x infinita; pone x infinitam, tum Æquatio superior evadet,

$1 + \dfrac{x}{q} + \dfrac{xx}{2qq} + \dfrac{x^3}{6q^3}$ &c. $= 2$, sed numerus ille quem exprimit Series $1 + \frac{x}{q} + \frac{xx}{2qq} + \frac{x^3}{6qq}$ &c. habet logarithmum Hyperbolicum $\frac{x}{q}$, quod quidem Geometris est notissimum; est igitur $\frac{x}{q} = \log. 2$, sed logarithmus hyperbolicus numeri 2 est $\frac{7}{10}$ proxime, adeoque $\frac{x}{q} = \frac{7}{10}$ proxime.

Ergo ubi q est $=1$, eodem tempore est $x = q$; at ubi q est infinita, est $x = \frac{7}{10} q$ proxime.

Jam

* Vid. pag. 180, 181, 182 primæ Editionis, & pag. 228, 229, 230, 231, 232 secundæ.

Jam ergo definivimus limites arctissimos inter quos ratio x ad q consistit: etenim ratio illa orditur ab æqualitate; & cum in infinitum est provecta, definit tandem in ratione 7 ad 10 proxime.

Atque talis fuit ratio mea solvendi Problematis istius quinti, quæ hoc habet commodi, ut sive logarithmos adhibere malis, sive multiplicatione perfacili contentus sis, ad scopum propositum satis prope accedas.

Exempla quædam attuleram quibus veritas conclusionis meæ comprobaretur, hæc autem erant.

EXEMPLUM I.

Invenire quotenis tentaminibus possit quis æqua sorte id in se suscipere, ut duabus tesseris duas Monades jaciat.

SOLUTIO.

Quoniam est casus unicus quo Monades ambæ jaciantur, & casus 35 quibus non jaciantur, erit idcirco $q = 35$: Multiplicetur itaque 35 per $\frac{7}{10}$, & productum 24.5 indicabit numerum jactuum quæsitum fore inter 24 & 25, si vero istud ope logarithmorum conficiatur, numerus jactuum quæsitus reperietur 24.605, cujus excessus supra id quod prius repertum fuerat perexigui est momenti; cum vero non dentur fractiones jactuum, solutiones ambæ eædem censeri poterunt.

EXEMPLUM II.

Invenire quotenis tentaminibus id æqua sorte suscipi possit, ut tribus tesseris tres Monades jaciantur.

SOLUTIO.

Quoniam est casus unicus quo Monades tres, tribus tesseris, jaciantur, casus autem 215 quibus non jaciantur, erit ideo $q = 35$: quapropter si multiplicetur 213 per $\frac{7}{10}$, productus numerus 150.5 id indicabit, numerum jactuum quæsitum fore inter 150 & 151; at vero si nova instituatur operatio, logarithmorum adminiculo, reperietur numerus jactuum quæsitus fore 149.5 cujus aberratio a numero jactuum supra reperto vix impedit quominus ambæ solutiones eodem recidere judicari possint.

Pro-

Problemata duo ſequentia nimirum 6um & 7um eo ſpectabant ut id definiretur, quotenis tentaminibus futurum foret æque probabile ut eventus contingeret bis, ter, quater, quinquies &c. ac ut rarius contingeret, idque nullo logarithmorum ſubſidio, ſed multiplicatione ſola, quod quidem non adeo facile videbatur ad perficiendum: etenim Æquationes ex his ſolutionibus ortæ hanc formam adeptæ erant, $\overline{1+\frac{1}{q}}|^{x} = 2 \times \overline{1+\frac{x}{q}}$, itemque $\overline{1+\frac{1}{q}}|^{x} = 2 \times \overline{1+\frac{x}{q}+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2qq}}$, atque etiam $\overline{1+\frac{1}{q}}|^{x} = 2 \times \overline{1+\frac{x}{q}+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2qq}+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}\times\frac{x-2}{3q^{3}}}$, & ſic de cæteris; Radices autem harum Æquationum in Tabulam ſequentem contuleram.

Tabella Limitum.

Si Contentio fiat de Eventu ſemel contingendo, numerus terminum x erit intra - - - - - - - - - - - - - - $1\,q$ & $0.693q$
Si de duplicato, intra - - - - - - - - - $3\,q$ & $1.678q$
Si de triplicato, intra - - - - - - - - - - $5\,q$ & $2.675q$
Si de quadruplicato, intra - - - - - - - - $7\,q$ & $3.672q$
Si de quintuplicato, intra - - - - - - - - - $9\,q$ & $4.670q$
Si de ſextuplicato, intra - - - - - - - - $11\,q$ & $5.668q$

& par eſt ratio omnium ſequentium, & limites ſemper accedunt ad rationem numeri binarii ad Unitatem, adeoque ſi de Eventu toties iterato contendatur quoties Unitas reperitur in n; modo n & q ad Unitatem habuerint rationem ſatis magnam, conjectura de numero tentaminum non multum a vero aberrans facile fiet, ponendo numerum tentaminum $= \frac{2n-1}{2}q$. Etenim x cito converget ad limitem minorem.

Videamus nunc quidnam auxilii D. *Monmort* ad ſolutionem antecedentium mihi ſuppeditaverit.

Si de Eventu unico contendatur, ſitque a numerus caſuum quibus eventus ille primo tentamine contingere poſſit, b vero numerus caſuum quibus poſſit non-contingere, atque ponatur $a+b=m$, tunc Vir Doctiſſimus pluribus incognitis adhibitis x, y, z, v, t &c. quarum ne una quidem ad ejus inveſtigationem erat neceſſaria, in hanc Seriem incidit, nimirum

$\frac{a}{m}+\frac{ab}{mm}+\frac{abb}{m^{3}}+\frac{ab^{3}}{m^{4}}+\frac{ab^{4}}{m^{5}}+\frac{ab^{5}}{m^{6}}+\frac{ab^{6}}{m^{7}}$ &c. cujus tot terminos addi oportere dicit, quot ad id requiruntur ut eorum ſumma poſſit

æquare

æquare fractionem $\frac{1}{2}$, quo facto, numerus terminorum adhibitus indicabit eum tentaminum numerum, qui faciat ut æqua forte de contingentia vel non-contingentia Eventus contendi possit; in hanc vero Seriem nullam aliam mutationem invexi quam ut scriberem a & b loco ipsarum p & q.

Sic autem pergit Vir Cl. " Hæc Methodus est simplicissima &
" vix differt ab ea quam *Huygenius* usurparat ad id determinandum,
" quotenis jactibus possit quis æqua Sorte contendere ut duabus
" tesseris, binos senarios jaciat; sed utraque hoc habet incommodi,
" quod neutra possit ad usum accommodari, cum ita accidit ut sit
" a numerus valde exiguus, & eodem tempore sint m & b numeri
" permagni, *v.g.* si ita eveniret ut esset $a=323$, & $b=578633$, pro-
" indeque $m=578956$ palam est necesse futurum fore ut plures
" quam mille termini hujus Seriei adhiberentur, cui præstando vix
" mille anni sufficerent.

Sed Vir Clarissimus qui tot præclara de Seriebus infinitis protulit, qui tot sibi erepta putavit, tunc temporis non animadvertit Seriem a se allatam esse progressionem geometricam; Equidem ille, postquam huc & illuc se diu versavit, & permultum tædii ipse sibi peperit, singulari artificio in rem tam arduam adhibito, ad hanc conclusionem tandem devenit, summam tot terminorum quot exprimit numerus b, fere $\frac{a}{m-b} - \frac{ab^b}{m^b \times \overline{m-b}} = 1 - \frac{b^b}{m^b}$.

Sed, si Vir Clarissimus tunc percepisset terminos Binomii ad potestatem quamlibet b evecti, ea facultate esse præditos ut quisque eorum designet numerum casuum quibus eventus, dato ludorum numero, toties se profert & toties se occultat quoties id exprimitur indicibus quantitatum a & b, huic termino competentium, in tantas difficultates non dilapsus esset, & illico comperisset ultimum terminum Binomii $\overline{a+b}|^b$ ad solutionem desideratam eum adducturum fuisse: ut mentem meam aliquanto plenius aperiam, non alienum erit exemplum hujus rei hoc loco subjicere, *v.g.* si id requiratur inveniendum quoties accidat ut Eventus aliquis cujus probabilitas contingentiæ sit ad probabilitatem non-contingentiæ, ut a ad b, dato ludorum numero octo, sexies se proferat, & bis se subducat, tunc terminus ille Binomii $a+b$ ad potestatem octavam evecti, qui talem se profert ut indices 6 & 2 quantitatum a & b exhibeat, declarat numerum casuum desideratum; porro terminus $28a^6b^2$ talem se profert, adeoque numerus casuum desideratus est $28a^6b^2$, numerus autem

autem casuum omnium est $\overline{a+b}|^8$, quo fit ut Fractio $\frac{28\,a^6b^2}{\overline{a+b}|^8}$ metiatur probabilitatem hujus contingentiæ.

Ergo nihil magis requirebatur ad solutionem Problematis *Monmortiani* quam ut ad hunc modum procederetur, nimirum, numerus casuum quibus Eventus, dato ludorum numero b, possit non-contingere est b^b, numerus igitur casuum quibus possit contingere est $\overline{a+b}|^b - b^b$, sed Probabilitates contingentiæ & non-contingentiæ ponuntur æquales, est igitur $\overline{a+b}|^b = 2b^b$ proindeque est

$$b = \frac{\log.\ 2}{\log.\ \overline{a+b} - \log.\ b}.$$

Quod hanc proprietatem Binomii tunc temporis Cl. *Monmort* nesciverit, id facile evincitur ex Regula ipsi a Cl. *Johanne Bernoulli* tradita quæ ista proprietate Binomii continetur; Regula autem his verbis fuerat enunciata. " *Petrus* & *Paulus* certamen inæquale in-" eunt ejus naturæ ut numerus casuum *Petro* favorabilium, sit ad " numerum casuum favorabilium *Paulo* ut a ad b; jam post ludos " aliquot peractos desint *Petro* ludi p, *Paulo* vero ludi q, quomi-" nus unus aut alter victor evadat, ratio sortium requiritur. Attolle " Binomium $a+b$ ad potestatem $p+q-1$, quo facto, dico summam " priorum terminorum quorum numerus sit q, esse ad summam " posteriorum omnium quorum numerus erit p, ut sors *Petri* ad " sortem *Pauli*.

Quod vero memorata proprietas Binomii mihi tunc fuerit nota, id perspicuum est cum ex tenore omnium fere Problematum quæ solveram, tum maxime ex principio quod in introductione mea posueram; etenim sic res a me exposita fuerat.

Si Eventus duo tales sint ut neuter ex altero pendeat, hoc est, ut sive unus contigerit, sive non; Probabilitas contingentiæ alterius nihil quidquam mutationis inde patiatur, tum sit p numerus casuum quibus eorum alter, quem primum appellare licet, contingere possit, & q numerus casuum quibus possit non-contingere, itemque sit r numerus casuum quibus secundus contingere possit, & s numerus casuum quibus possit non-contingere: multiplicetur $p+q$ per $r+s$; tunc productum ex multiplicatione ortum, nimirum $pr+qr+ps+qs$ erit numerus casuum omnium quibus contingentia & non-contingentia Eventum inter se variari possunt.

Ergo si A & B ita de *Eventibus* certent, ut A contendat fore ut uterque contingat, ratio sortium erit ut pr ad $qr+ps+qs$; etenim cum

cum singuli casus quibus fieri potest ut primus contingat, possint copulari cum singulis casibus secundi, palam est, ex notione multiplicationis, casus omnes quibus ambo contingere possint recte expressum iri producto multiplicationis casuum singulorum unius per casus singulos alterius, hoc est per pr.

Si A contendat de alterutrius eventu, ratio sortium erit ut $pr+qr+ps$ ad qr.

Sin A contendat fore ut primus eventurus sit, secundus non item, ratio sortium erit ut ps ad $pr+qr+qs$.

Et eodem argumentandi modo, si tres vel plures sint eventus de quorum contingentia A & B certent, ratio sortium invenietur Multiplicatione sola.

Hinc efficitur ut, si Eventus omnes eundem habuerint numerum casuum quibus contingere possint, & eundem itidem numerum casuum quibus possint non-contingere, & sit a numerus casuum quibus unus aliquis Eventus possit contingere, itemque b numerus casuum quibus possit non-contingere; sit etiam n numerus Eventuum omnium, tunc Binomium $a+b$ ad potestatem n sit attollendum; quo facto, solutio Problematis quasi inspectione perficietur.

Etenim si A cum B certet ea conditione, ut si Eventus unus vel plures contigerint ipse A vicerit; sin nullus, tum B vicerit; ratio sortium erit ut $\overline{a+b}|^n - b^n$ ad b^n, si quidem terminus Binomii unicus in quo a non reperitur est b^n.

Eodem modo, si A cum B certet ea conditione, ut si Eventus duo vel plures contigerint, A vicerit; sin nullus vel unicus, tum B vicerit, ratio sortium erit ut $\overline{a+b}|^n - b^n - nab^{n-1}$; ad $b^n + nab^{n-1}$; etenim termini illi duo in quibus aa non reperitur sunt b^n & nab^{n-1}, & sic deinceps de cæteris.

Hæc principia a me posita in Tractatu *de Mensura Sortis* satis ostendunt me naturam terminorum Binomii omnino perspexisse, nec mihi opus fuisse ut ea consulerem quæ a Cl. *Monmort* tradita fuerant ut quidquam luminis inde extraherem.

Etenim resumptis quantitatibus p, q, r, s supra adhibitis, nimirum $p+q$ ad denotandam contingentiam & non-contingentiam primi Eventus, & $r+s$ ad denotandam contingentiam & non-contingentiam secundi; ex eo quod mihi constiterit productum pr denotaturum contingentiam amborum eventuum, id mihi simul constitit quadratum pp eandem contingentiam denotaturum, si ita acciderit ut p & r fuerint inter se æquales; itemque ex eo quod id mihi innotuerit productum ps designaturum contingentiam primi & non-contin-

 gentiam

gentiam secundi, & vicissim productum rq contingentiam secundi & non-contingentiam primi, id mihi simul innotuisse necesse est, producta bina $pq+qp$ seu $2pq$ res antedictas etiam denotatura, cum ita acciderit ut p & r fuerint inter se æquales, itemque q & s: necesse fuit ut id mihi perspectum foret, coefficientem 2 idcirco producto $2pq$ apponendam fuisse quod ea denotaret binas permutationes ordinum pq & qp; necesse fuit ut illud perciperem quod posito *v. g.* numero eventuum æqualium octo, tunc futurum esset ut numerus casuum quibus Eventus sexies se proferret, & bis se subduceret, designaretur termino illo octavæ potestatis in quo Indices 6 & 2 reperiuntur, nempe $28p^6q^2$; at fortasse nesciveram hujus termini coefficientem, nimirum 28, designaturam numerum permutationum quas literæ $p, p, p, p, p, p, q, q,$ productum p^6q^2 constituentes subire possint; immò vero, hoc jam diu mihi erat exploratum, etenim ego fortasse primus omnium detexi coefficientes annexas productis Binomii, vel Multinomii cujuscunque, id denotare quotenis variationibus literæ producti positiones suas inter se permutent: sed utrum illud facile fuerit ad inveniendum, postquam lex coefficientium ex productis continuis $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ &c. jam perspecta esset, aut quisquam ante me hoc ipsum detexerit, ad rem præsentem non magni interest, cum id monere suffecerit hanc proprietatem Coefficientium a me assertam fuisse & demonstratam in *Actis Philosophicis Anno* 1697 impressis.

Ut vero quæ supersunt dicenda paucis complectar, tum etiam quæ jam dicta sunt summatim attingam, libet ea oculis subjicere ad hunc modum.

Problema primum Tractatus *de Mensura Sortis* a D. *Monmort* non fuerat generaliter solutum, illius tamen solutionem generalem ad D. *Joh. Bernoulli* a se missam fuisse dixit; melius fortasse dixisset remissam.

Problema secundum ab eo solutum quidem fuerat, sed ad casus particulares restrictum.

Problema 3um Vir Cl. non solverat.

Problema 4um non solverat.

De Lemmate nostro jam vidimus quid juris in illud habuerit.

De Probl. 5°, 6°, 7°, jam dictum est; interim fassus est tabellam limitum quam iis adjuxeram ingeniose fuisse excogitatam.

De Nono jam vidimus qua methodo illud a Cl. Viro solutum fuerit.

De

De Decimo maluit tacere.

De Undecimo jam diximus.

Prob. 13um erat *Huygenianum* a me facillime & generaliter solutum ope Progressionis geometricæ.

Prob. 14um propositum fuerat ab *Huygenio* cujus mentem D. *Monmort* non erat assecutus.

Probl. 15um non habuit, illius tamen solutionem Vir Cl. postea recondidit in Epistola ad Cl. *Nic. Bernoulli* missa : cæterum id sibi liquido constitit casus hujus Problematis altiores, per Series infinitas solvi non posse, at vero id fieri potuisse ostendimus in *Actis Philosophicis* N°. 341.

Probl. 16. & 17. fassus est se non habuisse.

Prob. 18um credidit se habuisse, donec monitus fuerit non ita fuisse.

Prob. 19um inversum scilicet proximi antecedentis non potuit habere.

Problemata sex deinceps insequentia quæ finem Tractatus faciebant, quæque Durationem Ludorum spectabant nondum habuerat, ex iis ~~vero unum in secunda~~ Editione sua sibi sumpserat solvendum, quod autem in hac re præstiterat fuerat a me maxima cum laude memoratum, nec hic constiteram, etenim cum Vir Cl. ad solutionem suam plures Series adhibuisset, unaquæque earum sic fuerat a me exposita, adeo ab omni ambiguitate liberata, ita cujusque Seriei functio definita fuerat, ita diligenter cautum fuerat ne sortes Collusorum & sortes spectatorum inter se miscerentur, ut cuivis hæc perpendenti facile constabit me Cl. viro aliquanto plus quam meras laudes tribuisse,

Cum Problema sequens, cujus prima pars in Editione anglica libri nostri jam soluta fuerat contineat casum sortis satis notabilem, tum etiam habeat solutionem non adeo vulgarem, nec difficultate carentem, illud prioribus adjungere visum est.

PROBLEMA VIII.

Collusores aliquot A, B, C, D, E, *&c. quorum numerus sit* p, *tribus tesseris ludant ea conditione, ut si quis eorum ternis jactibus plura omnino puncta quam reliquorum ullus jecerit, is depositum totum auferat, ita tamen ut si eorum duo, vel plures eundem punctorum numerum jecerint, majorem tamen numero punctorum quem reliquorum ullus jecerit, ii depositum totum inter se*

 æqua-

æqualiter partiantur, vel denuo ludum integrent, exclusis cæteris Collusoribus qui depositum quique suum amittant, jam vero postquam A *jactus suos instituerit, quæritur* 1° *quam probabile futurum sit ut cæteros vincat,* 2° *quantus debeat esse is Collusorum numerus quo efficiatur ut Expectatio ipsius* A *potior futura sit quam si plures vel pauciores fuissent Collusores.*

SOLUTIO 1æ Partis.

1°. Sit l Punctorum numerus quem A jecerit; 2° sit m numerus casuum quibus evenire possit ut Puncta l jaciantur, hinc erit m numerus itidem casuum quibus ad æqualitatem perveniri possit; 3° sit a numerus designans summam casuum omnium quibus Puncta inferiora $l-1$, $l-2$, $l-3$, &c. jaci possint; hinc fiet ut a itidem sit designaturus numerum casuum quibus A unum quemlibet ex Collusoribus cæteris B, C, D, &c. vincere possit; 4° sit b summa casuum omnium quibus Puncta superiora $l+1$, $l+2$, $l+3$, &c. jaci possint; postremo sit $s = a + m + b$. His positis Probabilitas ejus contingentiæ quæ faciat ut A Collusores cæteros vincat, exprimetur per fractionem $\frac{\overline{a+m}^{p} - a^{p}}{mp \times s^{p-1}}$, adeoque si singuli deponant summam 1, Expectatio ipsius A in totum depositum p erit $\frac{\overline{a+m}^{p} - a^{p}}{ms^{p-1}}$, sive, quod eodem recidit, lucrum ipsius A æstimandum erit ex quantitate

$$\frac{\overline{a+m}^{p} - a^{p}}{ms^{p-1}} - 1.$$

SOLUTIO 2æ Partis.

Sit $\log. s - \log. a = g$, itemque sit $\log. s - \log. \overline{a+m} = f$. quibus positis, numerus ille Collusorum qui potissimam ipsius A conditionem constituat, exprimetur fractione $\frac{\log. g - \log. f}{\log. \overline{a+m} - \log. a}$.

COROLLARIUM I.

Si A sortitus fuerit altissimum Punctum; quo major evadet Collusorum numerus, eò major fiet accessio ipsius Lucro; quantusvis tamen

men futurus sit Collusorum numerus, lucrum illud nunquam penitus attinget quantitatem a.

INVESTIGATIO 1ª Partis.

I°. Postquam A jactus suos instituerit, Probabilitas id eveniendi ut B deteriorem assequatur sortem erit $\frac{a}{f}$; Probabilitas igitur ut singuli B, C, D, E, &c. quorum numerus est $p-1$, ab ipso A vincantur antequam eorum ullus ad æqualitatem perveniat, erit $\frac{a^{p-1}}{f^{p-1}}$.

II°. Probabilitas ut Collusor B speciatim designatus ad æqualitatem perveniat est $\frac{m}{f}$; quo posito, Probabilitas ut Collusores cæteri quorum numerus est $p-2$ ab ipso A vincantur, nec eorum ullus ad æqualitatem perveniat, est $\frac{a^{p-2}}{f^{p-2}}$; quo etiam posito Probabilitas ut A, novo certamine inito cum B, eum vincat, erit $\frac{1}{2}$, Probabilitas igitur contingentiæ horum omnium est $\frac{m}{f} \times \frac{a^{p-2}}{f^{p-2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}ma^{p-2}}{f^{p-1}}$, sed numerus Collusorum præter A est $p-1$, adeoque Probabilitas ut unus quilibet ex iis Collusoribus ad æqualitatem perveniat, tum ut reliqui vincantur ab A, deinde ut Collusor ille qui ad æqualitatem pervenerat ipse vincatur, erit $\frac{\frac{p-1}{2}ma^{p-2}}{f^{p-1}}$.

III°. Probabilitas ut Collusores B & C, speciatim designati, ad æqualitatem cum A perveniant est $\frac{mm}{ff}$; quo posito, Probabilitas ut Collusores cæteri quorum numerus est $p-3$, ab ipso A vincantur, nullo eorum interea ad æqualitatem perveniente, est $\frac{a^{p-3}}{f^{p-3}}$; quo etiam posito, Probabilitas ut A novo certamine inito cum B & C horum utrumque vincat, est $\frac{1}{3}$; Probabilitas igitur contingentiæ horum omnium erit $\frac{mm}{ff} \times \frac{a^{p-3}}{f^{p-3}} \times \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}mma^{p-3}}{f^{p-1}}$; sed numerus variationum quibus

bus Collusores quilibet bini ex multitudine $p-1$ eligi possint, est $\frac{p-1}{1}\times\frac{p-2}{2}$, Probabilitas igitur ut duo quilibet Collusores, nec plures, ad æqualitatem perveniant, tum ut reliqui ab ipso *A* vincantur, deinde ut Collusores ii qui ad æqualitatem pervenerant ipsi vincantur, erit $\frac{\frac{p-1}{2}\times\frac{p-2}{3}m^2a^{p-3}}{s^{p-1}}$, & sic deinceps in infinitum.

Ex his igitur colligere licet mensuram Probabilitatis id eveniendi ut *A* Collusores reliquos omnes vincat, expressum iri per subjectam Seriem

$$\frac{a^{p-1}+\frac{p-1}{2}ma^{p-2}+\frac{p-1}{2}\times\frac{p-2}{3}mma^{p-3}+\frac{p-1}{2}\times\frac{p-2}{3}\times\frac{p-3}{4}m^3a^{p-4}\ \&c.}{s^{p-1}}$$

Jam vero ex inspectione Seriei suprascriptæ, statim id percipitur eam originem suam ducere a Binomio $\overline{a+m}|^{p-1}$ methodo *Newtoniana* in Seriem expanso, singulis hujus Seriei terminis ordine divisis per progressionem arithmeticam, 1, 2, 3, 4, &c.

Quapropter si instituatur Æquatio inter Binomium istud $\overline{a+m}|^{p-1}$ & valorem ejus in Seriem expansum, nimirum

$$a^{p-1}+\frac{p-1}{1}ma^{p-2}+\frac{p-1}{1}\times\frac{p-2}{2}mma^{p-3}+\frac{p-1}{1}\times\frac{p-2}{2}\times\frac{p-3}{3}m^3a^{p-4}\ \&c.$$

tunc Series designans eam Probabilitatem quam Problema requirit, nullo fere negotio ad expressionem finitam redigetur ope facilis Quadraturæ.

Etenim si tractetur quantitas m perinde ac si esset indeterminata, Area Curvæ cujus ordinatim applicata est Binomium $\overline{a+m}|^{p-1}$ & Abscissa m, reperietur esse $=\frac{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}{p}$, Area vero Curvæ cujus ordinatim applicata est Series Binomio æqualis, & abscissa m, reperietur esse $a^{p-1}m+\frac{p-1}{2}mma^{p-2}+\frac{p-1}{2}\times\frac{p-2}{3}m^3a^{p-3}$ &c. sed prior Area æqualis est posteriori, quapropter si fiat divisio utrinque per ms^{p-1}, prodibit quantitas $\frac{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}{mps^{p-1}}$ æqualis Seriei qua Probabilitas requisita designata fuerat.

Porro, cum Expectatio cujusque Collusoris sit in ratione composita ex Probabilitate quam is habet cæteros vincendi, & ex summa quam sit

fit obtenturus fi vicerit, cumque fumma depofita inter omnes Collufores fit p, fequitur Expectationem ipfius A effe $\frac{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}{m s^{p-1}}$, fed A ipfe depofuerat fummam 1, quapropter lucrum ejus æftimandum eft ex quantitate $\frac{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}{m s^{p-1}}-1$ *Q. E. I.*

INVESTIGATIO IIæ Partis.

Cum Quantitas $\frac{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}{m s^{p-1}}-1$ qua lucrum ipfius A defignatur æquanda fit *Maximo,* perfpicuum eft quantitatem $\frac{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}{s^{p-1}}$ etiamnum æquandum effe *Maximo,* nimirum propter quantitates datas m & 1.

At ex Methodo *de Maximis & Minimis,* id notum eft, fi fractio æquanda fit *Maximo,* tum debere conftitui æqualitatem inter Fluxionem Numeratoris ductam in Denominatorem, & Fluxionem Denominatoris ductam in Numeratorem; quapropter fi Fluxio denotetur fymbolo F; habebimus hanc Æquationem

$F:\overline{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}\times s^{p-1}=F:s^{p-1}\times\overline{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}$; porro fit $\overline{a+m}|^{p}=x$ erit igitur $p\log.\overline{a+m}=\log.\,x$, fumptifque Fluxionibus erit

$\dot{p}\log.\overline{a+m}=\frac{\dot{x}}{x}$, five $x\dot{p}\log.\overline{a+m}=\dot{x}$, five $\overline{a+m}|^{p}\dot{p}\times\log.\overline{a+m}=\dot{x}$; fed $\dot{x}$ eft Fluxio quantitatis x quam pofuimus æqualem quantitati $\overline{a+m}|^{p}$, adeoque Fluxio quantitatis $\overline{a+m}|^{p}$ erit æqualis quantitati $\overline{a+m}|^{p}\dot{p}\times\log.\overline{a+m}$, eodem procedendi modo, reperietur Fluxio quantitatis a^{p} æqualis effe quantitati $a^{p}\dot{p}\times\log.\,a$, itemque Fluxio quantitatis s^{p-1} æqualis quantitati $s^{p-1}\dot{p}\log.s$; quibus pofitis, in hanc deveniemus æquationem, nimirum

$\overline{\overline{a+m}|^{p}\dot{p}\log.\overline{a+m}-a^{p}\dot{p}\log.a}\times s^{p-1}=s^{p-1}\dot{p}\log.s\times\overline{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}$ cujus fi pars utraque dividatur per $s^{p-1}\dot{p}$, prodibit æquatio

$\overline{a+m}|^{p}\log.\overline{a+m}-a^{p}\times\log.a=\overline{\overline{a+m}|^{p}-a^{p}}\log.s$, five

$\overline{a+m}|^{p}\times\overline{\log.s-\log.\overline{a+m}}=a^{p}\times\overline{\log.s-\log.a}$. fit $\log.s-\log.\overline{a+m}=f$, itemque fit $\log.s-\log.a=g$; erit igitur $\overline{a+m}|^{p}f=a^{p}g$, unde emerget nova Æquatio logarithmica, nimirum $p\log.\overline{a+m}+\log.f=$

p log.

p log. a + log. g, sive p log. $\overline{a+m} - p$ log. $a =$ log. $g -$ log. f, quo fiet ut p sit $= \dfrac{\text{log.}\, g - \text{log.}\, f}{\text{log.}\, \overline{a+m} - \text{log.}\, a}$ Q. E. I.

ADMONITIO.

Si Collusores hoc pactum ineant ut jactus illi soli censeantur utiles qui facies binas ternasve similes admiserint, tunc Problema superius refertur ad ludum vulgo dictum *Raffling*, Gallice *le jeu des trois Raffles*, cui solvendo inserviet Tabula inferius subjecta quæ ad sortem duorum Collusorum designandam primitus constructa fuerat a Nob. Viro D. *Francisco Robartes* viginti amplius ante annos quam D^{i}. *Monmort* Liber in lucem prodiret.

Puncta 1	Casus ad vincendum 2	Casus ad æqualitatem 3	Casus ad vincendum 4	Puncta 5
LIV	884735	1	0	IX
LIII	884726	9	1	X
LII	884681	45	10	XI
LI	884534	147	55	XII
L	884165	369	202	XIII
XLIX	883400	765	571	XIV
XLVIII	881954	1446	1336	XV
XLVII	879470	2484	2782	XVI
XLVI	875501	3969	5266	XVII
XLV	869632	5869	9235	XVIII
XLIV	861199	8433	15104	XIX
XLIII	849706	11493	23537	XX
XLII	834679	15027	35030	XXI
XLI	815392	19287	50057	XXII
XL	791506	23886	69344	XXIII
XXXIX	762838	28668	93230	XXIV
XXXVIII	728971	33867	121898	XXV
XXXVII	690100	38871	155765	XXVI
XXXVI	646929	43171	194636	XXVII
XXXV	599472	47457	237807	XXVIII
XXXIV	548865	50607	285264	XXIX
XXXIII	496314	52551	335871	XXX
XXXII	442368	53946	388422	XXXI

442368
2

$f = 884736 = 96^3$

Nu-

Numeri primæ & quintæ Columnæ deſignant Puncta.

Numeri ſecundæ & quartæ, Punctis proxime adjacentes, indicant eos caſus quibus A Colluſorem quemlibet datum vincere poſſit, hos vero numeros univerſe deſignavimus per quantitatem a.

Numeri Columnæ tertiæ ſeu mediæ, e regione Punctorum collocati, eos caſus indicant quibus data Puncta jaci poſſint, qui numeri, univerſe deſignati per m, iis Punctis æque competunt quæ a majori extremo LIV, ac iis quæ a minori IX eodem intervallo diſtant.

Numerus $ſ$ adæquat duplam ſummam Columnæ mediæ nempe numerum 884736.

Ut exemplo uno aut altero ea quæ jam tradita fuerunt illuſtrentur; propoſitum ſit invenire lucrum ipſius A, poſito Punctorum numero quem is jecerit $=$ xl, Colluſorum autem numero $=5$.

Ex ſuperiori Tabula, numerus ſecundæ Columnæ, Punctorum numero xl adſcriptus, reperitur eſſe 791506; quapropter eſt $a=791506$, numerus vero tertiæ Columnæ huic deinceps adſcriptus, reperitur eſſe 23886; eſt igitur $m=23886$, unde fit $a+m=815392$; hæc vero ſumma aliquanto expeditius obtineri poterat, ſumendo ſcilicet numerum eum ſecundæ Columnæ qui Punctorum numero proxime ſuperiori xli reſpondet, quem utique inveniemus æqualem numero 815392 ut antea; hanc autem operandi rationem conſtructio Tabulæ ſatis per ſe indicat.

Porro $\log.\overline{a+m}=5.9113665$, $\log.a=5.8984542$, $\log.m=4.3781434$, $\log.ſ=5.9468136$; erunt igitur $\log.\overline{a+m}|^{p}=29.5568325$, $\log a^{p}=29.4922710$, $\log.mſ^{p-1}=28.1653978$, e quarum poteſtatum logarithmis commodum erit rejicere minimum indicem 28, etenim eo pacto fiet ut reſidui logarithmi tractabiliores ſint evaſuri, iique tamen eandem ſint ſuppeditaturi ſolutionem ac ſi index ille non reſectus fuiſſet.

Cum igitur numerus reſpondens logarithmo 1.5568325 ſit 36.044, itemque numerus reſpondens logarithmo 1.4922710 ſit 31.065, differentia horum numerorum erit 4.979, e cujus logarithmo, nimirum 0.6971421, ſi ſubtrahatur log. 0.1653978, qui vicem præſtat log. Denominatoris, relinquetur logarithmus 0.5317443 cui cum reſpondeat numerus 3.402, ſequitur lucrum ipſius A æſtimandum eſſe ex quantitate 2.402.

Poſitis iiſdem atque antea, ſi nunc id determinandum requiratur, quiſnam debeat eſſe is Colluſorum numerus qui faciat ut Expectatio ipſius A potior futura ſit quam ſi plures vel pauciores fuiſſent Colluſores, id conſequi licebit ſequenti operatione.

Log. f — log. a = 0.0483594 = g, log. f — log. $\overline{a+m}$ = 0.0354471 = f, ſed log. g — log. f = 0.1349014, & log. $\overline{a+m}$ — log. a = 0.0129123, erit igitur numerus Colluſorum requiſitus $= \frac{1349014}{129123} = 10.4$ prope; cum vero non dentur fractiones hominum, tum quod quantitates circa *Maxima* verſantes proxime ad æqualitatem accedant, pro numero illo poterit ſubjici vel 10, vel 11, lucrum vero ipſius *A* in utrolibet caſu erit 3.2 prope.

Si Punctorum numerus quem *A* jecerit ſit xlv, illius maxima expectatio non citius eveniet quam numerus Colluſorum futurus ſit omnino 73, quo in caſu lucrum erit 26.128.

At vero ſi Punctorum numerus quem *A* jecerit ſit liv, quo major non datur; tunc, cum ſit $m=1$, atque $f=a+1$, hinc fiet ut ejus Lucrum futurum ſit $= \frac{\overline{a+1}|^{p} - a^{p}}{\overline{a+1}|^{p-1}} - 1 = a+1 - \frac{a^{p}}{\overline{a+1}|^{p-1}} - 1$ $= a - \frac{a^{p}}{\overline{a+1}|^{p-1}} = a \times \overline{1 - \frac{a^{p-1}}{\overline{a+1}|^{p-1}}}$; pone numerum p infinitum, tunc Numerator a^{p-1} infinite minor erit Denominatore $\overline{a+1}|^{p-1}$, adeoque fractio $\frac{a^{p-1}}{\overline{a+1}|^{p-1}}$ evaneſcet, cui conſequens eſt ut lucrum ipſius *A* in hoc caſu futurum ſit $= a = 884735$.

Ex antedictis perſpicuum eſt ſolutionem de tribus Teſſeris ad pervaria ac prope infinita ludorum genera transferri poſſe.

Cum putabam his Problematibus finem imponere, amicus quidam mecum egit ne id prius facerem quam unum amplius Problema cæteris adderem; cujus rei hæc fuit occaſio, quod cum folia quædam hujus libri jam excuſa ei legenda dediſſem, ille continuo me benevole objurgavit quod Solutionem de Summa Terminorum in Binomio expanſo $\overline{a+b}|^{n}$ ex Duratione ludorum arceſſitam, quam ſibi Anno 1722. impertiveram, præterire voluiſſem: ego vero his excuſationibus uſus ſum, primum quod Solutio iſta mihi videretur nimis circumſcripta, utpote quæ ſumeret rationem a ad b eſſe rationem æqualitatis, deinde quod nunquam expertus eſſem an poſſet ad uſum facile accommodari, poſtremo quod ea quæ de Summa Terminorum jam erant a me prolata, ſolutionem ſatis commodam exhiberent; at ille nullam excuſationem admittere voluit, nec urgere deſtitit quin ei pollicitus eſſem me Regulam ei tunc temporis traditam in lucem emiſſurum; quapropter ut promiſſum exſolvam, ſequentia exaravi quæ fortaſſe fuſius aliquando tractabuntur.

PRÆ-

PRÆPARATIO.

Collusores duo *A* & *B* inter se pacifcantur ne prius ludendi finem faciant quam ludorum numerus *n* fit transactus: adsint spectatores duo *C* & *D*, quorum *C* contendat id eventurum, fore ut aliquando ante conclusum Certamen, vel expirante Certamine, *A* superaturus sit *B* dato ludorum numero *p*, vel *B* superaturus sit *A* eodem ipso ludorum numero, *D* vero contendat neutrum eventurum fore; adsint etiam Spectatores duo alii *E* & *F* quorum *E* contendat illud utrumque eventurum, tum ut Collusorum alter aliquando superaturus sit alterum ludorum numero *p*, tum ut Collusor ille qui perdiderat, non solum jacturam suam sit recuperaturus, sed etiam sit postea superaturus alterum, hoc ipso ludorum numero vel majori, *F* vero neget illud utrumque eventurum. Designentur Probabilitates quas spectatores habent adversarium quisque suum vincendi per quantitates *c*, *d*, *e*, *f*, quibus positis ad solutionem de summa Terminorum accedere licet.

PROBLEMA IX.

In Serie expansa Binomii* $1+1$ *ad potestatem parem* n *evecti, invenire rationem mediorum Terminorum, quorum numerus sit* p, *ad Summan Terminorum omnium.

Ne quis vero sit ambiguitati locus, Terminos medios intelligo tum Terminum medium, tum reliquos omnes quorum bini quique a medio æqualiter distant, ita ut multitudo Terminorum, ab utraque parte Termini medii consistentium, sit $\frac{p-1}{2}$, posito scilicet *p* numero impari.

SOLUTIO.

Ratio quæsita est $\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}f$ accurate.

Porro quantitas *d* datur ex Prob. IV. lib. IV. quantitas vero *f* æqualis fere est Probabilitati fore ut illud non eveniat, nimirum ut Collusorum alteruter alterum sit superaturus ludis $3p$, datur igitur propemodum ratio Terminorum mediorum, quorum numerus sit *p*, ad summam Terminorum omnium.

Illud observandum est quod si numerus *p* sit magnus, difficile admodum futurum sit ut Collusores ambo possint in hanc sortem in-

cidere quam designavimus quantitate e, etenim si quantitas $3p$ vel tantulum superet indicem n potestatis datæ, res omnino fieri non poterit; fac nunc ita esse ut numerus p sit magnus, quantitas igitur designata per e tanquam nihilo æqualis spectari poterit, quo fiet ut f futura sit æqualis unitati, adeoque ratio quæsita satis bene exprimetur per $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}$, sive per $\frac{d+1}{2}$.

Quamvis autem, si in id incidit ut quantitas p tanta sit ut adæquet vigesimam partem quantitatis n, vix futurum sit necesse ut res accuratius definiatur quam quomodo a nobis factum est, attamen lubet rem paululum dilatare.

Sint igitur d, f, h, l, Probabilitates fore ut illud non eveniat nempe ut Collusorum alter alterum sit superaturus ludis p, $3p$, $5p$, $7p$; tunc ratio quæsita erit $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}l$ proxime, hujus autem Formulæ demonstratio nititur in iis quæ habuimus in Prob. 25 & 26 Tractatus *de Mensura Sortis*, vel in Prob. 40 & 41 Editionis anglicæ, tum etiam in pag. 110. ejusdem Editionis.

Cum vero quantitates d, f, &c. determinentur subsidio Tabulæ sinuum rectorum & sinuum versorum, commodum erit transferre sinus versos ad sinus rectos dimidiorum Arcuum, ut istud ante monueramus ad Prob. IV. Lib. IV. quamobrem ut quantitates illæ d, f, &c. quam facile fieri possit obtineantur, hanc subjiciemus Regulam.

Sit n numerus Ludorum quos Collusores transigere statuant priusquam ludo desistant, p Ludorum numerus de quo Spectatores contendant, sit A semicircumferentia Circuli ad Radium 1, sumantur sinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{7A}{n}$ &c. donec semicircumferentia exhauriatur; sint S, T, V, X, &c. sinus recti istorum Arcuum, sint præterea s, t, v, x &c. sinus recti eorumdem Arcuum dimidiorum, tunc Probabilitas fore ut neuter Collusorum alterum sit superaturus ludis p, designabitur ad hunc modum.

$$\frac{S^{n+1}}{s^{n+2} \times 2^n p} - \frac{T^{n+1}}{t^{n+2} \times 2^n p} + \frac{V^{n+1}}{v^{n+2} \times 2^n p} - \frac{X^{n+1}}{x^{n+2} \times 2^n p} \text{ \&c.}$$

sic sit $n = 900$, $p = 45$, tunc terminus primus hujus Seriei, cæteris exclusis, fere definiet Probabilitatem fore ut neuter Collusorum alterum superaturus sit ludis p, jam terminus ille numeris expressus est .7354 prope, cui si addatur Unitas, summa erit 1.7354, cujus pars dimidia, nimirum .8677, satis prope accedet ad eam rationem quam termini quadraginta quinque medii potestatis expansæ $\overline{1+1}|^{900}$ habent ad summam

mam terminorum omnium; at si sumantur termini duo primi ejusdem Seriei, Probabilitas illa quam Series requirit invenietur esse .7324 cui si addatur Unitas, summa erit 1.7324 cujus dimidia pars .8662 consentit ad tres figuras cum vera ratione.

Si ratio a ad b non sit æqualitatis, modo tamen existat infra rationem numeri binarii ad Unitatem, ratio quam termini circa maximum versantes, in potestate expansâ $\overline{a+b}|^{n}$, habent ad ipsam potestatem $\overline{a+b}|^{n}$, non multum discrepabit ab ea ratione quam totidem termini potestatis expansæ $\overline{1+1}|^{n}$, circa medium versantes, habent ad potestatem 2^{n}.



LIBER



LIBER VIII.

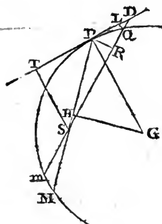
De Viribus Centripetis, itemque de maximis & minimis mutationibus quæ in motu Corporum Cœlestium occurrunt, Disquisitio Geometrica.

NNO 1705, Theorema quoddam generale inveneram cujus ope leges virium Centripetarum, in Curvis quibuslibet datis, aliquanto facilius quam per Methodos vulgo adhibitas consequi liceret; etenim summa rei huc redibat ut Radius Concavitatis Curvæ cujuscunque datæ definiretur, Tangensque ad Curvam duceretur, de quorum utroque Regulæ a Doctissimis Viris jam traditæ fuerant: ergo cum ad casus aliquot simplices hanc contemplationem adjunxissem, eamque comperissem ad usum maxime accommodatam, paucis post annis in animum induxeram experiri num vires centripetæ, in conicis sectionibus, expeditius ex natura focorum deduci poterant quam ex Æquationibus quibus relatio inter abscissas & ordinatas vulgo determinatur; quam ob causam calculum instituteram de magnitudine linearum præcipuarum quæ in his figuris ponuntur, earum expressione perpetuo revocata ad lineas e focis eductas, & in idem Curvæ punctum concurrentes: has vero lineas omnes in Tabulam contuleram quam viris Doctissimis mihique amicitia conjunctissimis D^nis^ *Halley, Machin, Jones, Colson* impertiveram. Inter proprietates conicarum sectionum quas ex natura Focorum ad hunc modum elicueram, quædam novæ repertæ fuerant, eæque mira simplicitate gaudentes, quibus hæc sequens annumerari potest, scilicet, Rectangulum sub lineis e focis eductis & in idem punctum circumferentiæ concurrentibus, æquale est quadrato ejus semidiametri quæ parallela est Tangenti per punctum datum ductæ; talium Theorematum adminiculo, facillima mihi patuerat Constructio Orbitarum quas Corpora in eis revolventia describunt, posita lege vis Centripetæ reciproce proportionali quadrato distantiæ.

Ex eo tempore quo primum hæc mihi perspecta fuerant usque dum evulgarentur, spatium satis magnum intercesserat, donec Cl. *Hallæus* mihi autor esset ut ea in *Actis Philosophicis* inserenda traderem, quod quidem factum fuerat Anno 1717; cum vero Vir eximius variis temporibus Problemata quædam astronomica mihi proposuisset de *Maximis* & *Minimis* quæ in motibus cœlestibus occurrunt, quorum aliqua jam edita fuerunt investigatione tamen prætermissa, alia vero iis anteriora nunquam lucem viderunt, non alienum fore duxi hæc in unum collecta aliquanto fusius exponere.

CAPUT I.

Theorema generale de viribus Centripetis.



SIT *MPQ* Curva quæcunque data, in cujus perimetro Corpus moveatur; sit *P* locus Corporis in Curva, *S* Centrum virium, *PG* Radius concavitatis, *ST* perpendicularis e Centro virium in tangentem per *P* eductam demissa; his positis, erit vis centripeta ubique proportionalis quantitati $\frac{SP}{PG \times ST\,Cub.}$

DEMON-

DEMONSTRATIO

Sumatur punctum *Q* puncto *P* infinite vicinum, tum ducatur recta *SQ* quæ secet tangentem in *D*, deinde centro *S*, intervallo *SP* describatur Arcus *PR* secans *SQ* in *K*; præterea, ex Centro Concavitatis *G* demittatur in *SP* perpendicularis *GH*; postremo eodem centro *G*, intervallo *GP* describatur circulus *Mm* secans *PS* in *M*: his positis, cum ex *Newtoni* principiis constet vim centripetam esse proportionalem quantitati $\frac{DQ}{SQq \times PRq}$, cumque sit *PQ* ad *PR* ut *SQ* ad *ST*, perspicuum est vim centripetam esse ut $\frac{DQ}{PQq \times STq}$; sed ex proprietate circuli per *P* & *M* transeuntis, est $PQq = DQ \times PM$; est igitur vis centripeta ut $\frac{1}{PM \times STq}$, sive ut $\frac{1}{PH \times STq}$, sed $PH, PG :: ST, PS$, quare est $PH = \frac{PG \times ST}{PS}$. Sive $PH \times STq = \frac{PG \times ST\ Cub}{PS}$, proindeque vis centripeta quæ modo reperta fuerat ut $\frac{1}{PM \times STq}$, nunc evadet ut $\frac{PS}{PG \times ST\ Cub.}$.

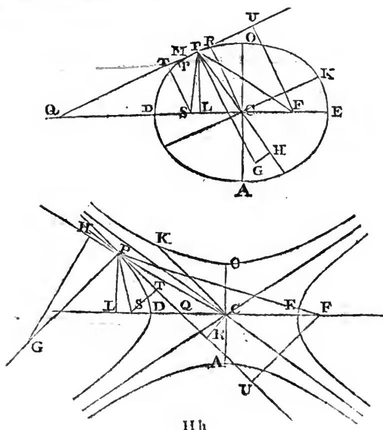
Cum Superius Theorema ad Cl. *Joh. Bernoulli* sine demonstratione misissem, ille paucis post diebus quam illud acceperat, mihi infra positam elegantissimam demonstrationem impertivit literis datis Basileæ 16° Feb. 1706.

Iisdem positis quæ in superiori figura, ex puncto *Q* demittatur in Tangentem perpendicularis *QL*, jam cum Triangulum *SPQ* exponat Tempus quo portiuncula Curvæ describitur, pone Tempus illud datum esse, quod ideo unitati æquale constituere possumus, erit igitur $ST \times PQ = 1$; sed illud notum est, Radium concavitatis *PG* esse ad *PQ* ut *PQ* ad *QL*, erit igitur $QL = \frac{PQq}{PG}$, sed $ST, SP :: QL, QD$, atque adeo erit *QD* (quæ scilicet metitur abscessum momentaneum corporis a Tangente, quæque propterea proportionalis est vi centripetæ,) $= \frac{QL \times SP}{ST} = \frac{PQq \times SP}{PG \times ST} = \frac{PQq \times SP \times STq}{PG \times ST\ Cub.}$, sed $STq \times PQq$ datur, quippe quod positum fuerit $SP \times PT = 1$. erit igitur *QD* seu vis centripeta ut $\frac{SP}{PG \times ST\ Cub.}$.

Ex eo autem tempore quo Theorema supra allatum inventum fuerat, illud propriis demonstrationibus instruxere Geometræ Clarissimi D. *J. Keillius* in *Actis Philos.* Num. 317. & D. *Jac. Hermannus* in *Phoronomia* sua pag. 70. quos consulat Lector.

CAPUT. II.

Proprietates quædam simplices Sectionum Conicarum ex natura Focorum deductæ, quorum ope Lex virium Centripetarum, Velocitates Corporum in eis revolventium, & descriptio Orbium facillime determinantur.



Sit DE Axis transversus conicæ Sectionis, AO Axis alter, C centrum Sectionis. Sit P punctum quodvis in Curva, PQ tangens in P occurrens Axi transverso in Q; puncta S, F foci; CP, CK semidiametri conjugatæ; PH semilatus rectum diametri CP, PG normalis Tangenti cui occurrat in G linea HG diametro CP perpendicularis: sint præterea ST, CR, FV perpendiculares in Tangentem demissæ e punctis S, C, F; denique demittatur in Axem normalis PL; his positis.

I. *Rectangulum sub distantiis ab utroque Ellipseos foco, hoc est* $SP \times PF$ *æquale est quadrato semidiametri* CK.

DEMONSTRATIO.

$PSq = PCq + CSq - 2CS \times CL$ per 13. II. *Elem.*

$PFq = PCq + CSq + 2CS \times CL$ per 12. II. *Elem.*

Unde $PSq + PFq = 2PCq + 2CSq$

Sed $PS + PF = DE = 2CD$, ac propterea

$PSq + PFq + 2PS \times PF = 4CDq$, erit igitur subtrahendo

$2PS \times PF = 4CDq - 2PCq - 2CSq$, sive

$PS \times PF = 2CDq - PCq - CSq$, est autem

$CSq = CDq - COq$, quapropter

$PS \times PF = CDq + COq - PCq$,

Sed $CDq + COq = PCq + CKq$ per 12. VII. Conic. Apoll. quare $PS \times PF = CKq$, hæc autem conclusio eodem demonstrandi genere aptaque signorum mutatione in Hyperbolam convenire reperietur.

II. *Distantia* SP *a foco, est ad normalem* ST *e foco* S *in Tangentem demissam, ut Semidiameter conjugata* CK *ad Semiaxem minorem* CO.

DEMONSTRATIO.

Ob similia Triangula SPT, FPV, erit PS, PF :: ST, FV, quare *componendo*, $PS + PF$ erit ad $ST + FV$ & earumdem dimidia CD ad CR, ut PS ad ST, sed $CR \times CK$ æquale est rectangulo $CD \times CO$ sub semiaxibus per 31. VII. Conicorum, proinde PS est ad ST; ut $CD \times CK$ ad $CD \times CO$ sive ut CK ad CO, ac pari argumento demonstrabitur PS esse ad FV in eadem ratione.

III. *In eadem etiam est ratione Semiaxis transversus* CD *ad normalem* CR *e centro* C *in tangentem demissam.*

Etenim

Etenim Rectangulum $CR \times CK$, ut jam dictum est, æquale est rectangulo $CD \times CO$, erit igitur $CD, CR :: CK, CO$.

IV. *Semidiameter quævis* PC *est ad distantiam puncti* P *a foco* S, *hoc est ad* SP, *ut distantia* FP *ab altero foco, ad dimidium latus rectum verticis* P.

Hoc autem palam fit tum ex Propositione prima, tum ex definitione lateris recti; etenim ex Propositione prima, est SP ad CK, ut CK ad PF, ex definitione vero lateris recti, est CP ad CK, ut CK ad $\frac{1}{2} l$, est igitur $SP \times PF = CP \times \frac{1}{2} l$, seu $CP, SP :: PF, \frac{1}{2} l$, latere recto designato per l.

V. *Rectangulum Semiaxium* $CD \times CO$, *est ad quadratum Semidiametri conjugatæ* CK, *ut* CK *ad Radium Curvaturæ in puncto* P.

Etenim sit PG radius Curvaturæ in puncto P; e puncto G demittatur ad diametrum PC normalis GH, tum sumatur in Curva punctum p puncto P infinite vicinum, dein diametro PC ducatur parallela pM quæ tangenti per P ductæ occurrat in M; hinc ex proprietate Circuli centro G, intervallo GP descripti, statim percipitur esse $Mp \times 2PH = PMq$, sed ex proprietate Ellipseos est $Mp \times 2PC$, $PMq :: PCq, CKq$, est igitur $Mp \times 2PC, Mp \times 2PH :: PCq, CKq$, seu $PC, PH :: PCq, CKq$, atque adeo $PC, CK :: CK, PH$, sed $PC, CR :: PG, PH$, cum igitur termini extremi utriusque novissimarum proportionum iidem sint, sequitur fore $CR, CK :: CK, PG$, seu $CR \times CK, CKq :: CK, PG$, sed rectangulum $CR \times CK$ æquale est rectangulo semiaxium $CD \times CO$, quapropter $CD \times CO$,

$CKq :: CK, PG$, quæ proportio eodem, procedendi modo, reperietur Hyperbolæ itidem competere.

PROBLEMA I.

Moveatur Corpus in Conica Sectione: requiritur lex vis Centripetæ tendentis ad focum Ellipseos.

SOLUTIO.

In expressione generali qua definita fuit lex vis Centripetæ, nimirum $\frac{SP}{PG \times ST\,Cub.}$, loco lineæ PG scribatur $\frac{CK\,Cub.}{CD \times CO}$ ipsi æqualis, per Prop. V. seu CK *Cub.* duntaxat, propter datas CD, CO; itemque loco lineæ ST scribatur $\frac{SP \times CO}{CK}$ ipsi æqualis per Prop. II. seu solùm $\frac{SP}{CK}$, quo facto reperietur lex vis Centripetæ proportionalis quantitati $\frac{SP \times CK\,Cub.}{CK\,Cub.\,SP\,Cub.}$, seu quantitati $\frac{1}{SPq}$, hoc est reciproce proportionalis quadrato distantiæ,

COROLLARIUM I.

Velocitas Corporis in Conica Sectione revolventis, est ad velocitatem revolventis in Circulo ad eandem distantiam SP a centro virium in Subduplicata ratione distantiæ FP ab altero foco, ad Semiaxem transversum Sectionis: hoc autem facile fluit tum ex Prop. XVI. Lib. I. Princip. tum ex proprietatibus sectionum conicarum jam antea demonstratis: etenim cum sint velocitates Corporum in suis orbitis in ratione composita ex ratione perpendiculorum in tangentes inverse, & subduplicata ratione laterum principalium directe, pone L esse latus principale Conicæ Sectionis; erit igitur velocitas Corporis revolventis in Conica Sectione, ad velocitatem revolventis in Circulo ad eandem distantiam SP, ut $\frac{\sqrt{L}}{ST}$ ad $\frac{\sqrt{2SP}}{SP}$, sed ex definitione lateris recti lateris recti principalis, $L =$ $\frac{2COq}{CD}$, est igitur ratio velocitatum ut $CO \times \sqrt{SP}$ ad $ST \times \sqrt{CD}$, sed ST demonstrata fuit æqualis $\frac{CO \times SP}{CK}$, adeoque ratio prædicta evadit ut $CO \times \sqrt{SP}$ ad $\frac{CO \times SP \times \sqrt{CD}}{CK}$, sive ut CK ad $\sqrt{SP \times CD}$, sed $CK =$ $\sqrt{SP}$

$\sqrt{SP \times PF}$, quapropter ratio velocitatum recte definietur per rationem $\sqrt{PF}$ ad $\sqrt{CD}$.

Coroll. II^um ex datis, velocitate in Conica Sectione, positione Tangentis, & Centro virium seu foco, facile determinabitur focus alter.

Sit enim velocitas data R; ea autem velocitas, qua describeretur Circulus ad datam a Centro distantiam SP, sit Q; jam per Corollarium I^um est R ad Q ut $\sqrt{PF}$ ad $\sqrt{CD}$, adeoque QQ ad RR ut CD ad PF, sive $2QQ$, ad RR, ut $2CD$ ad PF, sed in Ellipsi $2CD = SP + PF$, est itaque $2QQ$ ad RR, ut $SP + PF$ ad PF & *dividendo*, $2QQ - RR$ est ad RR ut SP ad PF: datur autem SP, adeoque datur PF magnitudine, sed PF datur etiam positione, ob Angulum FPR angulo SPT æqualem; datur igitur punctum F in quo locatur focorum alter; quo invento descriptio Curvæ in promptu est.

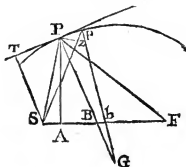
Sin vero $\frac{1}{2} RR$ majus fuerit quadrato QQ, $2QQ - RR$ erit quantitas negativa, & loco Ellipseos, Trajectoria describenda in Hyperbolam vertitur, tum erit $RR - 2QQ$ ad RR, ut SP ad PF distantiam alterius foci, ad alterum Tangentis latus ponendam ut habeatur Focus F.

Quod si acciderit ut QQ æquale sit dimidio quadrato ex R, evanescente scilicet quantitate $2QQ - RR$, tunc quarta proportionalis PE evadet infinita, proinde Trajectoria describenda desinet in Parabolam cujus Axis positione datur, quippe qui nunc parallelus sit lineæ PF quæ positione datur, propter Angulum FPR æqualem Angulo SPT; cum igitur dentur Punctum P, itemque Focus F, postremo positio Axis, palam est Trajectoriam parabolicam definitam esse.

Si cui libitum fuerit Calculum inire de invenienda lege vis Centripetæ in Curvis quæ ex duplici foco describuntur, iis bina ternave sequentia Theoremata usui fortasse erunt, quæ idcirco prioribus adjungere visum est.

THEOREMA

THEOREMA I.



Sit P *punctum quodlibet Curvæ*; S, F, *foci*, PB *tangenti normalis secans Axem* SF *in* B; *tum nominatis* SB, z; FP, v; SF, 2 a; *erit* SB$=\frac{2az\dot z}{zz-v\dot v}$, *qua cognita, Tangens facile ducetur.*

EXEMPLUM I.

Sit Curva ejus naturæ ut Æquatio qua definitur relatio inter z & v, sit $bz+cv=mm$, quantitatibus b, c, m, tanquam constantibus habitis; tunc erit $b\dot z+c\dot v=0$, adeoque $\dot v=\frac{-b\dot z}{c}$, quapropter $\frac{2az\dot z}{zz-v\dot v}=SB$ evadet $\frac{2acz}{cz+bv}$.

EXEMPLUM II.

Sit $zv=mm$ hinc erit $z\dot v+v\dot z=0$, adeoque $\dot v=\frac{-v\dot z}{z}$, quo fit ut $\frac{2az\dot z}{zz-v\dot v}=SB$ evadat $=\frac{2azz}{zz-vv}$.

THEOREMA II.

Sit punctum p. *puncto* P *infinite vicinum, tunc erit* $\overline{Pp}^2=$
$$\frac{\overline{4\dot z\dot z+4\dot v\dot v}\times\overline{vvzz+4zv\dot z\dot v}\times\overline{4aa-zz-vv}}{\overline{z+v+2a}\times\overline{z+v-2a}\times\overline{z+2a-v}\times\overline{v+2a-z}}.$$

EXEM-

EXEMPLUM.

Sit $z+v=2r$, tunc Numerator evadet $= 4\dot{z}\dot{z}zv \times \overline{2vz - 4aa + zz + vv}$ Denominator vero $= \overline{4rr - 4aa} \times \overline{4aa - 4rr - 4zz + 8rz}$, sed $zz+2vz+vv=4rr$, quare Numerator ulterius redigi poterit ad $4\dot{z}\dot{z}zv \times \overline{4rr-4aa}$, Denominator vero, propter $8rz - 4zz = 4z \times \overline{2r-z}$, poterit redigi ad $\overline{4rr-4aa} \times \overline{4aa - 4rr - 4zv}$; pone $rr-aa=mm$, tunc $\overline{Pp}|^2$ evadet $\frac{\dot{z}\dot{z}zv}{vz-mm}$, adeoque $Pp = \frac{\dot{z}\sqrt{zv}}{\sqrt{vz-mm}}$.

THEOREMA III.

Si ex puncto P *demittatur* PA *perpendicularis ad Axem, sintque,* $Pp=\dot{p}$, $PB=s$, $PA=y$, $Bb=\dot{t}$, *Radius Concavitatis erit* $\frac{s s\dot{p}}{s\dot{p}-\dot{t}y}$.

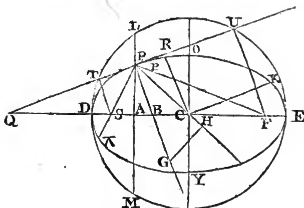
Ex datis autem PS, PF, FS, invenientur PA & SA; ex datis porrò SB & SA, invenietur AB; ex datis AB & PA, invenietur PB; ex data SB invenietur Fluxio ejus Bb, postremo ex data Æquatione involvente relationem z ad v, fluxiones $\dot{p}$ & $\dot{t}$ exprimi poterunt per $\dot{z}$, adeoque Radius Concavitatis omnino Fluxionibus liberabitur.

Hujus rei videre est Exemplum in Curva cujus Æquatio est $z+v=2r$ etenim si ponatur $rr-aa=mm$, invenietur $PA=y=\frac{m}{a}\sqrt{vz-mm}$, $SB=\frac{az}{r}$, adeoque $Bb=\dot{t}=\frac{a\dot{z}}{r}$, $PB=s=\frac{m}{r}\sqrt{zv}$, $\dot{p}=\frac{\dot{z}\sqrt{vz}}{\sqrt{vz-mm}}$, ex quibus elicietur $\frac{ss\dot{p}}{s\dot{p}-\dot{t}y}=\frac{vz\sqrt{vz}}{rm}$.

Si Centro S, intervallo SP, describatur arcus PZ, occurrens lineæ Sp in Z, tum ex quadrato Pp, subtrahatur quadratum pZ, relinquetur quadratum PZ, sed Pp, PZ :: PS, ST, adeoque innotescet perpendiculum ST, e centro virium S in Tangentem demissum.

Tabula

Tabula Linearum maxime insignium quæ in Ellipsi ponuntur.



Sit DE Axis major Ellipseos, OY Axis minor, C Centrum; sint S, F foci, P punctum in Curva; PS, PF lineæ e puncto P ad focos ductæ, PQ tangens occurrens axi transverso in Q; ST, CR, FV perpendiculares e punctis S, C, F, in tangentem demissæ; PB Tangenti normalis occurrens axi transverso in B; PA perpendicularis e puncto P demissa in Axem transversum; PC, CK, semidiametri conjugatæ; PG radius Concavitatis; GH perpendicularis e centro Concavitatis G ad diametrum PC demissa; $PS\pi$ linea per focum ducta utrinque Curvam attingens in P & π; Pp arcus Curvæ quam minimus; DVE Circulus diametro DE descriptus. Sit $CD=r$, $CO=m$, $CS=\sqrt{rr-mm}=a$, $SP=z$, $PF=v$, his positis erunt.

$SA=\frac{rz-mm}{a}$

$CA=\frac{rr-rz}{a}$

$PA=\frac{m}{a}\sqrt{vz-mm}$, quæ itidem inservit Hyperbolæ.

$SB=\frac{az}{r}$, expressio communis Ellipseos & Hyperbolæ.

$PB=\frac{m}{r}\sqrt{zv}$

$PQ=\frac{\sqrt{vz}\times\sqrt{vz-mm}}{z-r}$, cui in Hyperbola est analoga $\frac{\sqrt{vz}\times\sqrt{vz-mm}}{z+r}$

$ST=$

$ST = \frac{mz}{\sqrt{vz}}$ quæ expreſſio itidem competit Hyperbolæ, hinc poterit etiam deduci expreſſio lineæ e Parabolæ foco in tangentem normaliter ductæ, etenim $\frac{mz}{\sqrt{vz}} = \frac{mz}{\sqrt{2rz-zz}}$; ſed in Parabola r eſt infinita, proinde ST evadet $\frac{mz}{\sqrt{2rz}}$, cujus quadratum eſt $\frac{mmz}{2r}$, ſed $\frac{mm}{2r}$ eſt $\frac{1}{4}$ lateris recti, hinc ſi ponatur latus rectum $= l$ erit in Parabola $ST = \sqrt{\frac{1}{4} lz}$, ſive media proportionalis inter SD & SP, atque eodem modo proprietates cæteræ Ellipſeos aut Hyperbolæ in Parabolam transferri poterunt.

$CR = \frac{mr}{\sqrt{vz}}$

$FV = \frac{mr}{\sqrt{vz}}$

$CK = \sqrt{vz}$

$PC = \sqrt{rr+mm-vz}$, in Hyperbola vero $PC = \sqrt{rr-mm+zv}$

$PT = \frac{\sqrt{z} \times \sqrt{vz-mm}}{\sqrt{v}}$

$PV = \frac{\sqrt{v} \times \sqrt{vz-mm}}{\sqrt{z}}$

Rectangulum $PT \times PV = vz-mm$; cum vero in Ellipſi Puncta T, V, jaceant in peripheria circuli diametro DE deſcripti, ſequitur rectangulum partium lineæ cujuſque per punctum P eductæ, atque hinc inde peripheriam pertingentis, ſemper futurum fore æquale quantitati $vz-mm$; hoc vero alia ratione probari poteſt ad hunc modum; producatur utrinque linea PA uſque dum ſecuerit circumferentiam circuli in L & M, tunc cum ſit $AL = \frac{r}{a} \sqrt{vz-mm}$, $AP = \frac{m}{a} \sqrt{vz-mm}$, erit $PL \times PM = ALq - APq = \frac{rr-mm}{aa} \times vz-mm = \frac{aa}{aa} \times vz-mm = vz-mm$.

$QS = \frac{az}{r-z}$, in Hyperbola $QS = \frac{az}{z+r}$, in Parabola $QS = z$.

$PG = \frac{vz\sqrt{vz}}{rm}$ Expreſſio communis Ellipſeos & Hyperbolæ, quæ in Parabola evadit $\frac{4z\sqrt{lz}}{l}$.

$PH = \frac{vz}{\sqrt{rr+mm-vz}}$, in Hyperbola $= \frac{vz}{\sqrt{rr-mm+vz}}$, in Parabola $= 2z$.

Si e Puncto *P in peripheria conicæ sectionis sumpto, ducatur per focum linea quæcunque PS quæ producta iterum occurrat peripheriæ in puncta π, erit rectangulum $PS \times S\pi$ applicatum ad totam $P\pi$ æquale quartæ parti lateris recti principalis conicæ Sectionis.

Arcus circuli quam minimus Pp in Ellipsi & Hyperbola erit $= \frac{\dot{z}\sqrt{vz}}{\sqrt{vz - mm}}$, qui in Parabola evadet $= \frac{\dot{z}\sqrt{2lz}}{\sqrt{2lz - \frac{1}{4}ll}}$.

*Arcus circuli quam minimus PZ, centro S, intervallo SP descriptus, metiens Angulum $PSp = \frac{m\dot{z}}{\sqrt{vz - mm}}$.

PROBLEMA II.

Revolvatur corpus in Ellipsi circa Focum S; *requiritur Punctum illud peripheriæ ubi sit velocissimum decrementum velocitatis angularis.*

SOLUTIO.

In omni Trajectoria, velocitates angulares circa Centrum virium sunt reciproce proportionales quadratis distantiarum ab illo centro: etenim ob sectorum minimorum areas æquales, arcus quam minimi quibus anguli subtenduntur sunt reciproce ut radii, anguli autem sunt ut arcus directe & reciproce ut radii; ex quo fit ut anguli Sectorum minimorum, area æqualium, sint inter se reciproce in ratione duplicata radiorum seu distantiarum a centro virium: quo posito, si distantia a centro virium nominetur z, erit velocitas angularis ut $\frac{1}{zz}$, cujus decrementum est $\frac{\dot{z}}{z^3}$; sit jam distantia ab altero foco $= v$, semiaxis minor $= m$; tunc ex superiori tabula, invenietur area SPp, qua tempus exponitur, proportionalis quantitati $\frac{z\dot{z}}{\sqrt{vz - mm}}$; est igitur $\frac{z\dot{z}}{\sqrt{vz - mm}}$ quantitas data, quam idcirco constituere possumus Unitati æqualem, quo facto erit $\dot{z}$ ut $\frac{\sqrt{vz - mm}}{z}$, atque adeo decrementum velocitatis angularis erit nunc proportionalis quantitati $\frac{\sqrt{vz - mm}}{z^4}$ quæ cum debeat esse *Maximo* æqualis, erit ex doctrina Fluxionum

* *Vide* Fig. Pag. 238.

$4z^{3}\dot{z}\sqrt{vz-mm}=\frac{v\dot{z}+z\dot{v}}{2\sqrt{vz-mm}}\times z^{4}$, five $8\dot{z}\times\overline{vz-mm}=8z\dot{z}+zz\dot{v}$, fed eft $z+v=2r$, adeoque $\dot{z}+\dot{v}=0$, five $\dot{v}=-\dot{z}$, erit igitur $8vz-8mm=vz-zz$, quapropter fi fcribatur $2r-z$ loco quantitatis v, hinc emerget Æquatio $zz-\frac{7}{3}z=\frac{-4mm}{3}$ cujus Radix z eft vel $\frac{7r-\sqrt{49rr-48mm}}{6}$ vel $\frac{7r+\sqrt{49rr-48mm}}{6}$, harum vero radicum pofterior erit inutilis, propter limitationem ab Ellipfi oriundam, etenim hoc in cafu, radix z major erit quam ut poffit ex foco S in Ellipfi accommodari.

PROBLEMA III.

Pofitis iifdem ac in Superiori Problemate, invenire Punctum illud in quo fit velociffimum decrementum velocitatis motus realis in Curva.

SOLUTIO.

Notum eft velocitatem in Curva effe reciproce proportionalem perpendiculari e foco S in tangentem demiffæ, eft igitur velocitas ut $\frac{1}{ST}$ hoc eft ut $\frac{\sqrt{vz}}{mz}$, five propter datam m ut $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{z}}$, cujus idcirco Fluxio, nimirum $\frac{z\dot{v}-v\dot{z}}{2\sqrt{vz}}$ five $\frac{-2r\dot{z}}{2\sqrt{vz}}$ eft decrementum velocitatis, fed cum temporibus æqualibus, Areæ defcribantur æquales; quantitas quæ tanquam conftans fpectari debet eft $Pp\times ST$: fit igitur $Pp\times ST=1$, hinc erit $\frac{\dot{z}\sqrt{vz}}{\sqrt{vz-mm}}\times\frac{\sqrt{vz}}{mz}$ five $\frac{mz\dot{z}}{\sqrt{vz-mm}}=1$. quod quidem ftatim elici poterat ex Tabula fuperius allata; quare erit $\dot{z}$ ut $\frac{\sqrt{vz-mm}}{z}$; atque adeo, erit decrementum velocitatis, tempore quam minimo dato factum, ut $\frac{\sqrt{vz-mm}}{zz\sqrt{vz}}$, cujus quantitatis Fluxio jam eft æquanda nihilo, unde exurget Æquatio $\frac{v\dot{z}+z\dot{v}}{2\sqrt{vz-mm}}\times zz\sqrt{vz}=\frac{v\dot{z}^{3}+5z^{2}\dot{z}v}{2\sqrt{vz}}\times\sqrt{vz-mm}$, five fcripto $-\dot{z}$ loco Fluxionis $\dot{v}$, fublatifque irrationalibus; $4vvz-5mmv+mmz=0$; præterea fcripto $2r-v$ loco quantitatis z, prodibit Æquatio $2v^{3}-4rvv+3mmv-rmm=0$, in qua una dun-

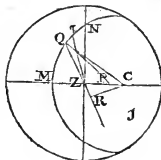
duntaxat ex Radicibus erit possibilis; sin convertatur v in $2r - z$, Æquatio evadet $2z^3 - 8rzz + 8rrz - 5mmr + 3mmz = 0$, quoniam vero latus principale Ellipseos est $\frac{2mm}{r} = l$, seu $mm = \frac{1}{2} rl$, hinc emerget Æquatio $2z^3 - 8rzz + 8rrz - \frac{5}{2} rrl + \frac{3}{2} rlz = 0$, quæ ut ad Parabolam transferatur, deleantur termini ii omnes in quibus quantitas infinita r vel non reperitur, vel ad quadratum non ascendit, tunc ex reliqua parte Æquationis, nimirum $8rrz - \frac{2}{5} rrl = 0$ seu $8z - \frac{5}{2} l = 0$, elicietur $z = \frac{5}{16} l$, seu $= \frac{5}{4} SD$.

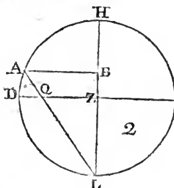
PROBLEMA III.

Data Solis declinatione, & Poli altitudine; invenire Momentum illud temporis quo Azimuthum Solis lentius augetur quam ullo alio temporis momento.

SOLUTIO.

Revolvatur Sol circa Polum P in parallelo MQN, (fig. 1ª) sit Z Zenith, simulque centrum Projectionis Stereographicæ; ZQ, Zq, duo altitudinis circuli sibi invicem proximi: intelligatur arcus maximi circuli per puncta Q, q ductus, ita ut Triangulum ZQq possit haberi pro Triangulo Sphærico ex arcubus maximorum circulorum constante; quo posito erit super Globum sinus Anguli QZq ad sinum Arcus Qq, ut sinus Anguli QqZ ad sinum lateris QZ.





Sed Qq dato tempore datur, eò quod Sol æquabiliter in Parallelo moveatur, ergo ſinus Anguli QZq, eſt ut $\frac{\text{Sin. Ang. } QqZ}{\text{Sin. Arc. } Qq}$, ſive ut $\frac{\text{Sin. Ang. } MQZ}{\text{Sin. Arc. } Qq}$, etenim anguli MQZ, QqZ differunt inter ſe tantummodo quantitate infinite parva; at vero anguli in Projectione Stereographica iidem ſunt qui in Globo; ea igitur ratio quam habet ſinus Anguli MQZ in Projectione ad ſinum ejus Arcus quem ZQ repræſentat, æquanda eſt *Minimo*. Sit igitur in Projectione C centrum circuli MQN, jungaturque QC; jam cum Angulus ZQC ſit complementum anguli MQZ, hinc efficietur ut $\frac{\text{Cosin. Ang. } ZQC}{\text{Sin. Arc. } QZ}$ ſit æquandus *Minimo*.

E Centro C demittatur in ZQ normalis CR, jam ſi Radius CQ ponatur $= a$, $CZ = f$, $QC = z$, atque inſuper $aa - ff = bb$, reperietur $QR = \frac{bb + zz}{2z}$, ſed QR eſt Coſ. Anguli ZQC ad Radium CQ, erit igitur quantitas $\frac{bb + zz}{2z}$ Numerator fractionis æquandæ minimo: præterea cum linea QZ ex natura Projectionis ſit æqualis tangenti dimidii ejus Arcus quem ipſa repræſentat, conſequens eſt ut ſinus ejuſdem Arcus ad Radium Globi futurus ſit æqualis quantitati $\frac{2rrz}{rr + zz}$, etenim (fig. 2.) patet eſſe LQ ad $LZ :: LH$, LA, itemque LQ, QZ, $::$ LA, BA, adeoque conjunctis rationibus, LQ *quad.* $LZ \times QZ :: LH$, BA, ſive $rr + zz$, $rz :: 2r$, $\frac{2rrz}{rr + zz} = AB =$ Sin. Arc. QZ ad Radium r, atque adeo ſinus Anguli illius quem metitur Arcus QZ ad Radium a, erit $\frac{2raz}{rr + zz}$ æqualis ſcilicet Denominatori fractionis æquandæ *Minimo*, quapropter ſi dividatur quantitas $\frac{bb + zz}{2z}$ per $\frac{2raz}{rr + zz}$, quotiens $\frac{\overline{bb + zz} \times \overline{rr + zz}}{4razz}$ erit quantitas æquanda *Minimo* quæ idcirco ſi ponatur *Minimo* æqualis, reperietur per regulas notas $z = \sqrt{br}$.

Jam ſi in Centro Z erigatur ZN normalis ad ZM, eaque producatur donec ſecuerit parallelum MQ in N, deinde ducatur CN, palam eſt $ZN^2 = CN^2 - CZ^2 = aa - ff$, ſed bb poſitum fuit $= aa - ff$, eſt igitur $ZN = b$, ſed ex natura Projectionis Stereographicæ ZN eſt tangens dimidii complementi ejus altitudinis quam Sol habet ſub verticali ortus & occaſus; porro hæc altitudo datur, propter datam Solis declinationem, datamque Poli altitudinem; datur igitur ZN ſeu b, atque adeo ſi ſumatur media proportionalis inter ZN & Radium

Sphæ-

Sphæræ, erit hæc media proportionalis Tangens dimidii complementi ejus altitudinis quam Sol habet eo ipſo temporis momento quo minima ſit mutatio Azimuthi; ducatur nunc Arcus PQ, jam igitur, cum in Triangulo Sphærico PQZ, latera omnia dentur, nimirum PQ complementum declinationis Solis, PZ, complementum altitudinis Poli, ZQ complementum altitudinis Solis, dabitur Angulus QPZ qui metitur diſtantiam Solis a Meridiano eo temporis momento quo id accidit ut ipſius azimuthum lentiſſime augeatur.

PROBLEMA IV.

Data Solis Declinatione, & Poli altitudine, invenire quales duo verticales Sol dato tempore pertingere debeat, ut differentia earum altitudinum quas habet ſub initio & fine temporis dati poſſit eſſe maxima.

Sit ſuper Globum Z Zenith, ZQ verticalis e quo Sol digreditur, ZS verticalis quem attingit poſt tempus datum; ergo dato tempore differentia Arcuum ZQ, ZS debet eſſe maxima; ſit YMS parrallelus a Sole deſcriptus, ſumantur Arcus Qq, Ss, infinite parvi & æquales, tum ducantur verticales Zq, Zs; deinde puncto Z ſeu Polo, deſcribantur Arcus Qt, Sv, qui ſecent verticales Zq, Zs in t & v; jam cum ex natura *Maximi*, non debeat tempore qs augeri differentia altitudinum ſupra quam augebatur tempore QS, inde ſit ut $ZS - ZQ$ ſit $= Zs - Zq$, hoc eſt ut qt ſit $= sv$; Triangula igitur Qqt, Ssv ſunt

ſunt ſimilia inter ſe & æqualia: projiciatur nunc Globus Stereographice in planum Horizontis, tunc Triangula projecta Qqt, Ssv erunt inter ſe ſimilia; ſit C centrum paralleli projecti, ducantur lineæ CQ, CS, tum ex centro C demittantur in QZ, SZ, perpendicula CR, CL, poſtremo producatur SZ donec ſecet Parallelum in Y, quibus factis, facile percipientur Triangula SCL, Ssv eſſe inter ſe ſimilia, itemque Triangula QCR, Qqt; erunt igitur Triangula CQR, CSL inter ſe ſimilia, atque etiam æqualia, propter æquales CQ, CS. Sit Radius CM projecti Paralleli $=a$, $CZ=f$; hæ vero lineæ dantur propter datam Solis declinationem, datamque Poli altitudinem; ponatur jam $aa-ff=bb$: tum ſi ZQ dicatur z, & ZS, y; invenietur $QR=\frac{bb+zz}{2z}$, itemque $SL=\frac{bb+yy}{2y}$, adeoque $2bby-2bbz=2yyz-2zzy$, unde facta diviſione utrinque per $2y-2z$, prodibit $bb=yz$, ſive $z, b :: b, y$; jam vero ſi in puncto Z erigatur ZM normalis ad ZD quæ ſecet circulum YMS in D, erit hæc linea $ZD=b$, quapropter erit ZQ ad ZD ut ZD ad ZS: hoc eſt tangens dimidii complementi ejus altitudinis quam Sol habet ſub initio temporis dati, eſt ad tangentem dimidii complementi quam habet ſub ortu & occaſu, ut hæc tangens ad tangentem ejus altitudinis quam habet poſt tempus datum; at vero Anguli QZD, DZS ſunt inter ſe æquales, etenim erit ex proprietate Circuli, rectangulum SZY æquale eſt quadrato ex ZD, ſed hoc quadratum demonſtratum fuit æquale rectangulo SZQ, erunt igitur rectangula SZY, SZQ inter ſe æqualia, adeoque lineæ ZY, ZQ erunt inter ſe æquales, ex quo fit ut anguli MZY, MZQ ſint inter ſe æquales, porro anguli ad verticem oppoſiti MZY, SZC ſunt inter ſe æquales, erunt igitur anguli MZQ, SZC etiam inter ſe æquales, qui ſi ſubtrahantur a rectis angulis DZM, DZC, reſidui anguli QZD, SZD erunt inter ſe æquales; quapropter ſi Sol intra datum tempus tetigerit duos verticales hinc inde æqualiter ab ortu & occaſu diſtantes, differentia earum altitudinum quam habuit ſub initio & fine temporis dati, major erit quam ſi duos quoſlibet alios verticales intra idem tempus attigiſſet.

Nunt ut inveniatur declinatio horum verticalum a primario verticali, itemque differentia altitudinum Solis ſub initio & fine temporis dati, ſic pergere licet.

Sit

Sit *P* polus Mundi, *Z* zenith, *WZE* primarius verticalis, *RNLS* parallelus quem Sol dato die decurrit; *LZR*, *NZS* verticales duo hinc inde æqualiter a primario verticali declinantes, ſecanteſque parallelum Solis in punctis *RNSL*: ex puncto *P* ad puncta ſectionum *R*, *S*, *L*, ducantur Meridiani *PR*, *PS*, *PL*; deinde polo *P* per *Z* deſcribatur circulus ſecans *RZL* in *M*, tum ducatur Arcus circuli maximi *PM*; poſtremo e Polo *P* ducatur ad *RZL* arcus perpendicularis *PK*; his poſitis patet Triangula *ZPR*, *MPL*, eſſe inter ſe æqualia, itemque Triangula *ZPS*, *ZPL*, *MPR*, adeoque angulos *ZPS*, *ZPL* eſſe inter ſe æquales, porro ſi ex æqualibus angulis *ZPS*, *ZPL* demantur anguli æquales *ZPR*; *MPL*, anguli reſidui *RPS*, *ZPM* erunt inter ſe æquales: ſed angulus *RPS* eſt menſura temporis a Sole impenſi intra verticales *RZL*, *SZN*; quamobrem angulus *ZPM* eſt menſura ejuſdem temporis, ſed ex Doctrina Sphericorum, eſt Radius ad Coſinum arcus *ZP*, ut tangens Anguli *ZPK* ad Co-tangentem anguli *PZK*, ſeu Radius eſt ad ſinum latitudinis, ut Tangens dimidii ejus anguli qui tempus metitur, ad tangentem declinationis verticalium *ZR*, *ZS* a primario verticali; præterea cum Triangula *MPR*, *ZPS* ſint inter ſe æqualia, perſpicuum eſt *ZM* eſſe differentiam arcuum *ZR*, *ZS*, hoc eſt differen-

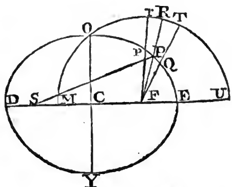
tiam

tiam altitudinum Solis sub initio & fine temporis dati, at vero arcus *ZK* æqualis est dimidio arcui *ZM*, erit igitur arcus *ZK* dimidia differentia altitudinum Solis, qui arcus ex hac analogia innotescet, nimirum; Cosinus anguli *PZK*, seu sinus declinationis verticalium a primario verticali, est ad Radium, ut Cotangens arcus *PZ*, seu Tangens latitudinis, ad Cotangentem arcus *ZK*.

Tempora vero seorsim sumpta quibus Sol percurrit arcus inæquales *RT*, *TS* interpositos inter verticales *ZR*, *ZS* & primarium verticalem, ex data poli altitudine, Solis declinatione, & declinatione verticalium ex Sphæricis peti poterunt.

PROBLEMA V.

Si in Ellipsi EPD *cujus centrum* C, *Axis major* DE, *Axis minor* OY, *Foci* S, F, *Planeta revolvat circa centrum virium in Foco* S *positum, tunc ex puncto* P *in Curva sumpto, ducantur ad Focos lineæ* PS, PF; *deinde ad lineam* FE *&* *punctum* F *constituatur Angulus* EFQ *qui sit ad duos rectos, ut Area* PSE *ad Aream Semi-Ellipseos* DOPE; *invenire maximam differentiam Angulorum* EFP, EFQ.

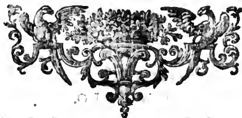


SOLUTIO.

Sit ut antea semi-axis major $CD=r$, semi-axis minor $CO=m$, $SP=z$, $FP=v$; centro *F*, intervallo *r* describatur circulus *MRV* occurrens axi transverso in *M* & *V*; deinde producantur *FP*, *FQ*

donec secent circumferentiam circuli in R & T; postremo sumatur punctum p puncto P infinite vicinum, ducaturque Fp occurrens circumferentiæ in r; sit Arcus $VT=t$, Arcus $VR=y$, semicircumferentia $MTV=b$; jam vulgo notum est Aream semi-ellipseos esse $=\frac{1}{2}mb$, quapropter si Area ESP nominetur A, erit $t,\ b :: A,\ \frac{1}{2}mb$, erit igitur $t=\frac{2A}{m}$ unde erit $\dot{t}=\frac{2\dot{A}}{m}$, sed ex inspectione Tabulæ nostræ est $\dot{A}=\frac{-\frac{1}{2}mz\dot{z}}{\sqrt{vz-mm}}=\frac{\frac{1}{2}mz\dot{v}}{\sqrt{vz-mm}}$, utpote quæ sit genita ex ductu dimidii arcus quam minimi Pp in perpendiculum e foco S in tangentem demissum. Sequitur itaque ut $\dot{t}$ sit $=\frac{z\dot{v}}{\sqrt{vz-mm}}$; sed ex eadem Tabula, patet arcum infinite parvum, radio v descriptum, mensuram scilicet anguli PFp esse $=\frac{m\dot{v}}{\sqrt{vz-mm}}$, erit igitur $Rr=\dot{y}=\frac{mr\dot{v}}{v\sqrt{vz-mm}}$, ex quo efficitur ut $\dot{t},\ \dot{y} :: vz,\ mr$; sed in casu *Maximi*, est $\dot{t}-\dot{y}=0$, quare erit $vz-mr=0$, sive $vz=mr$. Hinc, si centro C, intervallo $\sqrt{rr+mm-mr}$ describatur Circulus secans Ellipsim in quatuor punctis, ea erunt Puncta in quibus fient maximæ differentiæ angulorum PFE, QFE.

F I N I S.





E R R A T A.

PAG. 19. *lin.* 34. *pro* præciperetur, *lege* perciperetur
Pag. 21. *lin.* 10. *pro* parte, *lege* partes
lin. 20. *dele* &c.
lin. 5 *ab ima pagina, pro* posterior, *lege* posterior $\frac{n+1}{2}$
lin. 3 *ab ima pagina, post* affirmativos *dele* n
Pag. 38. *lin.* 10. pro mP, lege m^3P
lin. 17. pro $Q=v$, lege $Q=1$
Pag. 56. *lin.* 14. pro $\overline{1-pz}|^2$ lege $\overline{1-px}|^2$
Pag. 60. *lin.* 1. pro $\overline{\theta-\lambda n}\times F - z^\theta \times R^{-\lambda}$, lege $z^\theta R^{-\lambda} - \overline{\theta-\lambda n}\times F$
Pag. 62. *lin.* 1. pro $+\overline{2\theta-4\lambda n}$, lege $-\overline{2\theta-4\lambda n}$
Pag. 63. *lin.* 5. *pro* Denominator, *lege* Numerator
Pag. 69. *lin.* 12. pro $4pz$ lege $+pz$
Pag. 112. *lin.* 1. pro $v\times^{n+1}$, lege vx^{n+1}
Pag. 118. *lin.* 5. *producatur linea super terminos ducta usque dum pertingat ad ultimum terminum z*
Pag. 148. *lin.* 4. *post* septimi, *adde* accommodasse
Pag. 149. *lin.* 6. *ab ima pagina, pro* hinc, *lege* hunc
Pag. 159. *lin.* 11. pro $\frac{x+1}{2}$ lege $\frac{x+1}{1}$
Pag. 160. *lin.* 8. *dele* hæc
Pag. 203. *lin.* 1 & 2. *pro* propositio, *lege* proposito
Pag. 206. *lin. ult.* pro $\overline{a^q b^p - b^p}$, lege $\overline{a^q - b^q}$
Pag. 215. *lin.* 11. *ab ima pagina, pro* dilapsus, *lege* delapsus.

